



FFI Forsvarets
forskningsinstitutt

22/00075

FFI-RAPPORT

Laserstråling gjennom turbulent atmosfære

– Del 1 – stråling

Andreas Schiller

Laserstråling gjennom turbulent atmosfære

– Del 1 – stråling

Andreas Schiller

Emneord

Atmosfærisk turbulens
Laserstråler
Optiske systemer
Partielle differensialligninger
Statistiske metoder
Stokastiske prosesser

FFI-rapport

22/00075

Prosjektnummer

1602

Engelsk tittel

Laser beam through turbulent atmosphere
Part 1 – radiation

Elektronisk ISBN

978-82-464-3404-9

Godkjennerne

Halvor Bjordal, *forskningsleder*
Halvor Ajer, *forskningssjef*

Dokumentet er elektronisk godkjent og har derfor ikke håndskreven signatur.

Opphavsrett

© Forsvarets forskningsinstitutt (FFI). Publikasjonen kan siteres fritt med kildehenvisning.

Sammendrag

Prosjektet "laservåpen og beskyttelse" innenfor forskningsprogrammet "luftvern, ubemannede luftsystemer og laser" går ut på å utvikle høyeffektlasere som mottiltak mot innkommende projektiler, droner og liknende. Siden lasereffekten leveres på målet gjennom en typisk turbulent atmosfære, er det relevant å estimere dens påvirkning på strålekvaliteten. Denne rapporten (den første i en serie) diskuterer de mest brukte metodene (Rytov- og Markov-approksimasjonen) for beregning av de generelle forventningsverdiene til strålefeltet (midlet feltstyrke, andregrads korrelasjonsfunksjon og i tilfellet Rytov-approksimasjonen også fjerdegrads korrelasjonsfunksjon) uten å spesifisere noen form for atmosfærisk modell.

Summary

The project "laser weapons and protection" within the research program "air defence, unmanned airborne systems and laser" has the goal to develop a high-power laser as a countermeasure against incoming projectiles, drones and similar. Since the laser effect is delivered on target through a typically turbulent atmosphere, it is relevant to estimate the atmosphere's effect on the laser beam quality. This report (the first in a series) discusses the most used methods (the Rytov and Markov approximations) to calculate the general expectation values of the radiation field (which are the average field strength, the second-order correlation functions and, in case of the Rytov approximations, also the fourth-order correlation function) without specifying any particular atmospheric model.

Innhold

Sammendrag	3
Summary	4
1 Innledning	7
2 Rytovapproximasjonen	10
2.1 Iterativ løsning ved rekkeutvikling	10
2.2 Momenter og kumulanter	12
2.3 To ledd i Bornrekken og tre forventningsverdier	13
3 Paraksiale stråler og Gaußstråler	16
4 To ledd i Bornrekken	19
5 Tre forventningsverdier	20
6 Matriseoptikk	24
6.1 Enkle optiske matriser	24
6.2 Paraksiale stråler	25
6.3 Bornrekken	26
6.4 Forventningsverdiene	28
7 Reelle funksjoner	31
7.1 Resiprok konjugerte funksjoner	36
7.2 Forventningsverdiene	39
7.3 Matriseoptikk	40
8 Markovapproximasjonen	45
8.1 Midlet feltstyrke	46
8.2 Andregrads korrelasjonsfunksjon	48
8.3 Fjerdegrads korrelasjonsfunksjon	51
9 Konklusjon og fremtidsutsikt	52
Vedlegg	
A Tredje ordens ledd til Rytovapproximasjonen	53
B Eksempler til enkle optiske matriser	54
B.1 Grenseflate med krumning	54
B.2 Tynn linse	54

B.3	Hulspeil	55
B.4	Blenderåpning	55
B.5	Gaußlinse	56
B.6	Tykk linse og hovedplan	56
B.7	Revers stråleretning	57
C	Stråleparameterprodukt	58
D	Novikov-Furutsuteoremet	59

1 Innledning

Rapporten tar for seg den grunnleggende teorien som behandler forplantning av monokromatisk stråling (typisk laserstråling) gjennom turbulent atmosfære. Utgangspunkt for bevegelse i fysikken er typisk en bølgelikning. Eksempler er Schrödingerlikningen eller Diraclikningen for kvantemekaniske bølger, og relativistiske eller ikke-relativistiske bølgelikninger for henholdsvis elektromagnetiske eller akustiske bølger. Bølger blir påvirket av mediet de forplanter seg i. Disse medier kan for eksempel være homogene, ha regelmessige strukturer eller være stokastiske. Elektromagnetisk stråling gjennom homogene, kontinuerlige medier er i seg selv et bredt og spennende tema. Jeg har beskrevet enkelte slike media (plasmamodeller med og uten lokal ladningsnøytralitet, metaller og polariserbare medier) i FFI-rapporten 13/01086. Interessant i denne sammenhengen er ofte dispersjonsrelasjoner i avhengighet av polarisasjon og ytre påvirkninger som for eksempel retningen til et konstant magnetisk felt. Bølgeforplantning i kontinuerlige medier med regelmessige strukturer er for eksempel gitt ved spredning av røntgenstråling eller nøytroner ved krystaller eller kunstige nano- eller mesoskopiske strukturer. Nøytronspredning er spesielt interessant siden spredningslengde kan ha ganske store forskjeller mellom isotoper fra samme element. I tillegg kan spredningslengden være spinnavhengig. Bølgeforplantning gjennom et stokastisk medium som atmosfæren er viktig i forskjellige sammenhenger. På den ene siden ønsker man å vite for eksempel intensitetsfordelingen en laser avsetter på et mål etter at strålen har passert en turbulent atmosfære. På den andre siden lider også bildekvaliteten til for eksempel et optisk system for rekognosering under forstyrrelser av en turbulent atmosfære. Begge effekter kan beskrives med samme teori, som derfor er et relevant forskningsområde for FFI.

Matematisk sett er mediet en bølge forplanter seg i gitt et felt som inngår i bølgelikningen. Hvis feltet ikke er homogent og kontinuerlig, så gjør inkludering av et slikt felt bølgelikningen mer komplisert. En slik differensiallikning kan fortsatt løses numerisk (eller i noen enkle tilfeller analytisk). Litt mer vanskelig blir det hvis feltet er stokastisk. Da har man det man kaller en stokastisk differensiallikning. I så fall er man ikke interessert i én spesiell løsning for én spesiell realisering av det stokastiske feltet, men hvordan løsningen til differensiallikningen ser ut i middel, hvilken varians løsningene har, eller generelt hvilken fordeling løsningene følger. En måte å finne det ut er selvfølgelig å lage en tilstrekkelig mengde av realiseringer til det stokastiske feltet, for så å beregne løsninger for hver eneste av dem. Slik kan man bygge opp en fordeling av løsninger som man så kan bruke for å beregne momenter som middelvei eller varians. Eller så kan man teste om den fordelingen av løsninger man har tilsvaret en eller annen teoretisk fordeling man har resonert seg frem til. En annen måte å angripe problemet er å beregne forventningsverdier til løsningen direkte basert på forventningsverdier til det stokastiske feltet. Denne metoden likner litt på prinsippene som vanlig feilpropagering bygger på (som jeg har beskrevet i FFI-rapport 18/02018), men altså anvendt på differensiallikninger, ikke algebraiske likninger.

Ved forplantning av laserstråling gjennom atmosfære gjør man helt i begynnelsen to forenklinger. Man ser bort fra dispersjon (det vil si man har $\frac{d\omega}{dk} = \text{konst}$) og man bryr seg ikke om polarisasjonseffekter. Det betyr at bølgelikningen til et vektorfelt reduseres til Helmholtzlikningen til et skalart felt. Videre, så tenker man at det stokastiske feltet, som representerer brytningsindeksfluktuasjoner i en turbulent atmosfære er kontinuerlig i den betydningen at lysets bølgelengde er mye mindre enn lengdeskalaen til fluktuasjonene. Det betyr i praksis at den eikonale approksimasjonen skal gjelde (som beskrevet i FFI-notat 16/01232 eller den allerede nevnte FFI-rapporten 13/01086, kapittel 4.2).

I kapittel 2 løses Helmholtzlikningen iterativt ved en vanlig Bornrekke. Men raskere konvergens oppnås ved å rekkeutvikle argumentet til en eksponentialfunksjon, som vi kommer til å kalle Rytovrekke. Elementene til Bornrekken kan relateres til elementene til Rytovrekken. De ønskete størrelsene som midlet feltstyrke samt andre- og fjerdegrads korrelasjonsfunksjoner uttrykkes ved forventningsverdier til en slik Rytovrekke, det vil si som forventningsverdier til en eksponentialfunksjon, som altså tilsvarende en momentgenererende funksjon. Siden logaritme til en momentgenererende funksjon er den tilsvarende kumulantgenererende funksjonen, og siden elementene i rekkeutviklingen til de to funksjonene også kan relateres med hverandre, så kan forventningsverdien til en eksponentialfunksjon (altså forventningsverdien til Rytovrekken) overføres til en eksponentialfunksjon av forventningsverdier (altså forventningsverdier til elementer eller kombinasjoner av elementer til den opprinnelige Bornrekken) og vi er egentlig allerede i mål. Ved slutten av kapittelet har vi nemlig funnet de tre forventningsverdiene av elementene (og kombinasjoner derav) til Bornrekken som tillater oss å bygge opp midlet feltstyrke samt korrelasjonsfunksjonene opptil andre orden i rekkeutviklingen, men med raskere konvergens enn ved å bruke en enkel Bornrekke. Hele den metoden har blitt kjent under navnet Rytovapproksimasjonen.

Kapitlene 3 til 7 tjener stort sett å spesifisere løsningen og spisse den inn i retning av relevante scenarier. I kapittel 3 behandler vi spesielt paraksiale stråler, som skiller seg fra sfæriske bølger ved at de har en veldefinert bevegelsesretning (typisk langs z -aksen), men i motsetning til en planbølge, så er paraksiale stråler begrenset i diameter. I tillegg kan paraksiale stråler produseres med en vilkårlig gitt krumning til fasefronten. Videre i betraktningen tar vi spesielt Gaußstråler som kjennetegnes ved en radialsymmetrisk, gaussisk amplitudeprofil.

I kapittel 4 beregnes helt konkret de første to leddene i Bornrekken for en Gaußstråle. I kapittel 5 beregnes så de tre forventningsverdiene til disse to leddene og kombinasjoner derav som er relevante for Rytovapproksimasjonen. Dermed har vi spesifisert midlet feltstyrke samt andre- og fjerdegrads korrelasjonsfunksjoner opptil andre orden i rekkeutviklingen. Ved det tidspunktet har vi ikke ennå gjort altfor sterke antakelser angående atmosfæremodellen. Helt konkret inngår nemlig i de tre forventningsverdiene kun korrelasjonsfunksjonen til det stokastiske feltet som representerer brytningsindeksfluktuasjoner. Under antakelsen av et homogent stokastisk felt eksisterer nemlig ifølge Wiener-Khinchinteoremet en slags Fouriertransformert til denne korrelasjonsfunksjonen som et Stieltjesintegral. Hvis den tilsvarende spektralfunksjonen er absolutt kontinuerlig, så eksisterer til og med en ekte Fouriertransformasjon som et Riemannintegral. Det er denne antakelsen vi skal jobbe videre med. På den andre siden, så skal vi i denne rapporten ikke se på spesifikke atmosfæriske modeller. Vi skal altså ikke beregne helt konkrete verdier basert på en eller annen atmosfærisk modell. Dette overlater vi til en senere rapport, rett og slett for å ende opp med et håndterbart dokument.

Rytovapproksimasjonen, spesielt i forbindelse med paraksiale stråler, egner seg særlig i forbindelse med matriseoptikk. I kapittel 6 beskriver vi derfor enkle systemer som kan beskrives ved matriseoptikk (en enkel strekning er et av disse systemer). Vi begrenser oss her til radialsymmetriske systemer. Deretter generaliserer vi først (radialsymmetriske) paraksiale stråler til matriseoptiske anvendelser, så beregner vi de første to leddene til Bornrekken og så de tre relevante forventningsverdiene til Rytovapproksimasjonen for matriseoptiske systemer og Gaußstråler. Løsningen reduseres selvfølgelig til løsningen som er funnet i kapittel 5 for en enkel strekning. Det handler seg altså om en ekte generalisering av den forrige løsningen.

I kapittel 7 introduseres et sett med reelle stråleparametere, som er strengt tatt unødvendige, men ganske nyttige og vanlige i bruk. Parameterne gir mulighet til å beskrive Gaußstråler men også

planbølger og sfæriske bølger på en og samme, konsistente måte. Løsningene til kapitlene 5 og 6 reformuleres ved hjelp av disse parameterne. Dette danner et naturlig slutt punkt for diskusjonen av Rytovapproximasjonen.

Til tross for den formelle enkelheten og brede anvendeligheten til Rytovapproximasjonen, har man måttet utvikle en metode til, ofte kalt Markovapproximasjon eller parabolisk-likning metode, som ikke er basert på en rekkeutvikling. Markovapproximasjonen er beskrevet i kapittel 8. Her begynner vi med Helmholtzlikningen som først blir forenklet til en paraksial bølgelikning (det vil si en parabolisk differensiallikning). Her tar vi forventningsverdiene til de enkelte leddene der et av leddene erstattes ved en variasjonsderivert basert på Novikov-Furutsuteoremet. Dette resulterer i en differensiallikning for forventningsverdien, og ikke lenger for selve feltet. Differensiallikninger kan formuleres og løses for midlet feltstyrke og andregrads korrelasjonsfunksjon, men ikke for fjerdegrads korrelasjonsfunksjon. Resultatet for midlet feltstyrke er faktisk identisk med resultatet fra Rytovapproximasjonen. Andregrads korrelasjonsfunksjon for planbølger er også identisk med resultatet fra Rytovapproximasjonen, men for paraksiale bølger får man et annet resultat, som i tillegg har bedre samsvar med eksperimenter i de områdene der Rytovapproximasjonen feiler. Markovapproximasjonen er altså bedre egnet til å beskrive den fysikalske realiteten, men man har ikke ennå kommet til enighet om hvordan man formulerer fjerdegrads korrelasjonsfunksjon. Videre, så er Markovapproximasjonen i mindre grad egnet for bruk med matriseoptiske systemer. I tillegg er en av forutsetningene for bruk av Novikov-Furutsuteoremet at det stokastiske feltet er et gaussisk felt, det vil si det setter sterkere forutsetninger til brytningsindeksfluktuasjoner enn bruken av Wiener-Khinchinteoremet som anvendes i Rytovapproximasjonen. Markovapproximasjonen er et aktivt forskningsområde som muligens kan diskuteres i større grad i en senere rapport.

Rapporten presenterer ikke noen nye teoretiske funn. Tvert imot er formalismen som er diskutert såpass gammel og velprøvd at den har funnet veien i lærebøker som for eksempel boken til Larry C. Andrews og Ronald L. Phillips "Laser Beam Propagation through Random Media" SPIE Press, Bellingham WA (2005), eller den opprinnelig russiske boken til V. Tatarski "The Effect of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation" U.S. Department of Commerce, Springfield VA (1971). Der det er behov for å løse integraler er løsningen tatt ut av boken til I.S. Gradshteyn og I.M. Ryzhik "Table of Integrals, Series, and Products" 7th edition Academic Press, Burlington MA (2007). Framstillingen av teorien og metodene er derimot min og jeg tror at ved å se bort fra konkrete atmosfæriske modeller, og med den oppbyggingen jeg har valgt, så blir formalismen klarere og lettere å forstå. Planen er i videre rapporter å diskutere noen atmosfæriske modeller og for en av disse modellene og for et helt konkret optisk system å sammenlikne resultater fra Rytovapproximasjonen, Markovapproximasjonen og et tilstrekkelig stort ensemble av numeriske løsninger som baserer seg på spesielle realiseringer av atmosfæremodellen. Et dataprogram som kan produsere slike numeriske løsninger eksisterer allerede ved FFI. Programmet er utviklet av G. Arisholm (som jeg også ønsker å takke for gjennomlesning av manuskriptet og mange gode forslag for forbedringen av teksten) og har fått navn Sisyfos (simulation system for optical science).

2 Rytovapproksimasjonen

Utgangspunkt for alle drøftelser der man ikke tar hensyn til dispersjon er Helmholtzlikningen

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0.$$

En optisk turbulent atmosfære er beskrevet ved en stedsavhengig brytningsindeks, som varierer rundt sin middelvei ved

$$n(\mathbf{r}) = n_0 + \tilde{\nu}(\mathbf{r}).$$

Her er $n_0 = 1,000\,293$ ved standard trykk og temperatur, mens $\tilde{\nu}$ er den fluktuerende parten. Gjerne brukes også $\nu(\mathbf{r}) = \tilde{\nu}(\mathbf{r})/n_0$ der typiske fluktuasjoner er i størrelsesorden 10^{-8} . Hvis man så definerer lengden til in-medium bølgevektoren

$$k = \frac{n_0 \omega}{c},$$

så kan man formulere utgangspunktet til problemstillingen som

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 [1 + \nu(\mathbf{r})]^2 \mathbf{E} = 0.$$

2.1 Iterativ løsning ved rekkeutvikling

Løsning i laveste orden, det vil si ved å fullstendig neglisjere $\nu(\mathbf{r})$ blir en ikke-perturbert bølge, som for eksempel en planbølge, en sfærisk bølge eller en paraksial stråle. En ikke-perturbert bølge \mathbf{E}_0 er altså en løsning til den homogene differensiallikningen

$$\Delta \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0.$$

Siden $\nu(\mathbf{r})$ er en liten perturbasjon til den homogene differensiallikningen, kan man forsøke å beregne de videre bidragene iterativt.¹ Leddet som er kvadratisk i $\nu(\mathbf{r})$ neglisjeres for øyeblikket, dermed beregnes første ordens bidrag ved den inhomogene differensiallikningen

$$\Delta \mathbf{E}_1 + k^2 \mathbf{E}_1 = -2k^2 \nu(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0.$$

Dette er en differensiallikning for \mathbf{E}_1 med det inhomogene leddet $-2k^2 \nu(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$. Det betyr at løsningen er en sum av den generelle løsningen til den homogene differensiallikningen, som man allerede kjenner – det er jo $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, og én spesiell løsning til den inhomogene differensiallikningen. Den ene spesielle løsningen kan man for eksempel formulere ved Greensfunksjonen til problemet. Her får man formelt

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [-2k^2 \nu(\mathbf{r}') \mathbf{E}_0(\mathbf{r}')] d^3 r'.$$

Greensfunksjonen er som kjent alltid gitt ved løsningen til differensiallikningen med det inhomogene leddet $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, det vil si ved løsningen av

$$\left(\Delta + k^2 \right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

¹Om perturbasjonsmetoden er egnet må man selvfølgelig finne ut ved å sammenlikne resultatene med eksperiment.

Greensfunksjonen for utløpende bølger er for eksempel

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Neste trinn i iterasjonen er

$$\Delta \mathbf{E}_2 + k^2 \mathbf{E}_2 = -2k^2 \nu(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1 - k^2 \nu^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0,$$

som igjen er en differensiallikning for \mathbf{E}_2 med et inhomogent ledd. Her og i alle videre trinn må vi ta vare på det kvadratiske leddet i $\nu(\mathbf{r})$ og vi får en rekke med bidrag til iterasjonen som alle er gitt ved

$$\mathbf{E}_{i+1}(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [-2k^2 \nu(\mathbf{r}') \mathbf{E}_i(\mathbf{r}') - k^2 \nu^2(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{i-1}(\mathbf{r}')] d^3 r'.$$

Disse bidragene kan i prinsippet summeres opp til løsningen til det opprinnelige problemet som er altså

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \dots$$

Denne rekken kalles også Bornrekken, men den viser visstnok ikke særlig kjapp konvergens.

I følgende blir det lettere å bruke Bornrekken i formen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) [1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}) + \varepsilon_2(\mathbf{r}) + \dots],$$

som vi kaller den normerte Bornrekken. En måte å reformulere rekken er nemlig gitt ved

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{\psi_1(\mathbf{r}) + \psi_2(\mathbf{r}) + \dots},$$

som vi i følgende kommer til å kalle Rytovrekke. Sammenhengen mellom de to rekkene er gitt ved å utvikle eksponentialfunksjonen i Rytovrekken i sin Taylorrekke. Her får man for de første leddene (vi sløyfer i det følgende argumentet \mathbf{r})

$$e^{\psi_1 + \psi_2 + \dots} = 1 + (\psi_1 + \psi_2 + \dots) + \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2 + \dots)^2 + \dots = 1 + \psi_1 + \left[\psi_2 + \frac{1}{2}\psi_1^2 \right] + \dots$$

Vi kan altså identifisere første og andre ordens leddene med hverandre og får

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \psi_1 \\ \varepsilon_2 &= \psi_2 + \frac{1}{2}\psi_1^2 \end{aligned}$$

eller, hvis vi reformulerer den andre identiteten, så får vi

$$\psi_2 = \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2.$$

Dermed kan vi reformulere Rytovrekken ved leddene til den normerte Bornrekken gjennom

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \dots}.$$

Løsningen midles over den statistiske fordelingen til brytningsindeksen, det vil si vi er interessert i forventningsverdier av typen

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \left\langle e^{\varepsilon_1(\mathbf{r}) + \varepsilon_2(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \varepsilon_1^2(\mathbf{r}) + \dots} \right\rangle$$

for feltstyrken, men også andre- og fjerdegrads korrelasjonsfunksjoner av typen

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_2) \left\langle e^{\psi(\mathbf{r}_1) + \psi^*(\mathbf{r}_2)} \right\rangle$$

og

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_2) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_3) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_4) \left\langle e^{\psi(\mathbf{r}_1) + \psi^*(\mathbf{r}_2) + \psi(\mathbf{r}_3) + \psi^*(\mathbf{r}_4)} \right\rangle,$$

der alle $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots$ i eksponenten kan (og selvfølgelig vil) approksimeres ved de første leddene til henholdsvis hver sin normerte Bornrekke.

2.2 Momenter og kumulanter

For nå har vi formulert midlet feltstyrke og korrelasjonsfunksjonene som forventningsverdier til en eksponentialfunksjon. Disse lar seg, ved hjelp av kumulanter, reformulere som en eksponentialfunksjon av (en kombinasjon av) forventningsverdier.

Forventningsverdier, eller momenter av n -te orden til en fordelingsfunksjon $\phi(x)$ er gitt ved

$$m_n \equiv \langle x^n \rangle = \int \xi^n \phi(\xi) d\xi.$$

En sannsynlighetsfordeling kan defineres ved alle dens momenter (hvis de eksisterer). Det er ikke så ulikt konseptet til en kontinuerlig og uendelig deriverbar funksjon som kan defineres ved sin Taylorrekke (der den konvergerer). Disse to ideer kan til og med knyttes sammen ved å definere en momentgenererende funksjon $M(x)$ til en sannsynlighetsfordeling. Denne funksjonen er nemlig definert ved at koeffisientene til dens Taylorrekke er lik momentene til den tilsvarende sannsynlighetsfordelingen. Vi har altså

$$M(x) = \sum m_n \frac{x^n}{n!}.$$

Så lenge alle momenter eksisterer og summen konvergerer, så gjelder nå at den n -te deriverte til $M(x)$, evaluert ved $x = 0$ er lik m_n , altså det n -te momentet til sannsynlighetsfordelingen $\phi(x)$. Derfor har $M(x)$ fått navn "momentgenererende funksjon". For å faktisk finne $M(x)$ kunne man i prinsippet beregne alle momenter først, for så å konstruere Taylorrekken ut av disse, for så å se hva slags funksjon som er gitt ved denne rekken. Enklere blir det å beregne integralet

$$M(x) = \langle e^{x\xi} \rangle_\xi = \int e^{x\xi} \phi(\xi) d\xi.$$

Hvis man nemlig utvikler eksponentialfunksjonen i integralet i sin Taylorrekke og integrerer denne rekken ledd for ledd, så får man

$$M(x) = \int \sum \frac{x^n \xi^n}{n!} \phi(\xi) d\xi = \sum \frac{x^n}{n!} \int \xi^n \phi(\xi) d\xi = \sum m_n \frac{x^n}{n!}.$$

Relatert til den momentgenererende funksjonen $M(x)$ er den kumulantgenererende funksjonen $G(x) = \ln [M(x)]$. Dens deriverte, evaluert ved $x = 0$, er nemlig lik kumulantene κ_n til sannsynlighetsfordelingen $\phi(x)$. Med andre ord, så er funksjonen gitt ved Taylorrekken

$$G(x) = \sum \kappa_n \frac{x^n}{n!}.$$

Kumulantene og momentene kan nå relateres til hverandre ved

$$1 + m_1x + \frac{1}{2}m_2x^2 + \dots = e^{\kappa_1x + \frac{1}{2}\kappa_2x^2 + \dots},$$

siden $M(x) = e^{G(x)}$. Her ser man også enkelt at $\kappa_0 = 0$ siden en sannsynlighetsfordeling skal være normert, det vil si det må gjelde $m_0 = 1$. Kumulantene og momentene kan relateres til hverandre ved å utvikle eksponentialfunksjonen i sin Taylorrekke

$$\begin{aligned} e^{\kappa_1x + \frac{1}{2}\kappa_2x^2 + \dots} &= 1 + \left(\kappa_1x + \frac{1}{2}\kappa_2x^2 + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\kappa_1x + \frac{1}{2}\kappa_2x^2 + \dots \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \kappa_1x + \frac{1}{2}(\kappa_2 + \kappa_1^2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

Vi kan altså igjen identifisere første og andre ordens leddene med hverandre ved

$$\begin{aligned} m_1 &= \kappa_1 \\ m_2 &= \kappa_2 + \kappa_1^2, \end{aligned}$$

der vi igjen reformulerer den andre identiteten til

$$\kappa_2 = m_2 - m_1^2,$$

som gjør at den momentgenererende funksjonen kan skrives som

$$M(x) = \langle e^{x\xi} \rangle_{\xi} = e^{G(x)} = e^{\kappa_1x + \frac{1}{2}\kappa_2x^2 + \dots} = e^{m_1x + \frac{1}{2}(m_2 - m_1^2)x^2 + \dots},$$

det vil si forventningsverdien til en eksponentialfunksjon kan formuleres som en eksponentialfunksjon til en kombinasjon av forventningsverdier.

For å få ønsket resultat jamført kapittel 2.1 skal den momentgenererende funksjonen evalueres ved $x = 1$. Man ønsker altså helt konkret å beregne

$$M(x = 1) = \langle e^{\xi} \rangle_{\xi} = e^{m_1 + \frac{1}{2}(m_2 - m_1^2) + \dots}.$$

2.3 To ledd i Bornrekken og tre forventningsverdier

Det enkleste er å beregne forventningsverdien til feltstyrken. Her hadde vi jamført kapittel 2.1 og 2.2

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \left\langle e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2} \right\rangle \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{m_1 + \frac{1}{2}(m_2 - m_1^2)}.$$

Her har vi altså gjort to approksimasjoner. For det første har vi trunkert Rytovrekken til andre orden i $\varepsilon(\mathbf{r})$ jamført kapittel 2.1, for det andre har vi trunkert rekken av momenter i eksponentialfunksjonen (jamført kapittel 2.2) til andre ordens momenter. Disse momenter skal fortsatt være momenter til hele den (trunkerte) eksponenten til Rytovrekken, det vil si vi skal beregne momenter til hele uttrykket $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2$. Dette produserer en del høyere ordens ledd som man igjen kan neglisjere.

Helt konkret, får man for det første momentet

$$m_1\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\right) = m_1(\varepsilon_1) + m_1(\varepsilon_2) - \frac{1}{2}m_1\left(\varepsilon_1^2\right),$$

der vi har benyttet oss av at første moment er en lineær funksjon av argumentene. Siden første moment til $\nu(\mathbf{r})$ er lik null (fluktuasjonene var definert rundt en middelvei som allerede er tatt hensyn til), så er første moment til ε_1 også lik null, det vil si, vi kan forenkle hele det uttrykket til

$$m_1\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\right) = \langle \varepsilon_2 \rangle - \frac{1}{2}\langle \varepsilon_1^2 \rangle.$$

Andre moment er nå gitt ved

$$\begin{aligned} m_2\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\right) &= \left\langle \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2\varepsilon_2 + \frac{1}{4}\varepsilon_1^4 \right\rangle. \end{aligned}$$

Her ser vi at kun det første leddet er et andre ordens ledd. Alle andre ledd er tredje eller fjerde ordens ledd. Hvis vi nå kun beholder ledd opptil andre orden, så ender vi opp med

$$m_2\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\right) \approx \langle \varepsilon_1^2 \rangle.$$

Med disse uttrykkene kan vi nå approksimere forventningsverdien til eksponentialfunksjonen ved

$$\left\langle e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2} \right\rangle \approx e^{[\langle \varepsilon_2 \rangle - \frac{1}{2}\langle \varepsilon_1^2 \rangle] + \frac{1}{2}\{\langle \varepsilon_1^2 \rangle - [\langle \varepsilon_2 \rangle - \frac{1}{2}\langle \varepsilon_1^2 \rangle]^2\}}.$$

Siden alt som er innenfor hakeparentesene er andre ordens ledd, så blir kvadratet av alt i disse parentesene til høyere ordens ledd og kan neglisjeres. Da står vi igjen med det enkle uttrykket

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{\langle \varepsilon_2 \rangle}.$$

Neste trinn er å beregne korrelasjonsfunksjonene. For $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ må vi beregne $\langle e^{\psi(\mathbf{r}_1) + \psi^*(\mathbf{r}_2)} \rangle$, som produserer første moment

$$m_1\left(\varepsilon_1(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) + \varepsilon_2(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_2) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\mathbf{r}_1) - \frac{1}{2}\varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_2)\right),$$

som vi kan forenkle som før til

$$\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_2) \rangle - \frac{1}{2}\langle \varepsilon_1^2(\mathbf{r}_1) \rangle - \frac{1}{2}\langle \varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_2) \rangle.$$

I andre moment overlever kun

$$\left\langle (\varepsilon_1(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2))^2 \right\rangle,$$

som vi kan omforme til

$$\langle \varepsilon_1^2(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle \varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_2) \rangle + 2 \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle.$$

Til sammen får vi altså (etter å ha droppet alt relatert til m_1^2 som består utlukkende av høyere ordens ledd)

$$\left\langle e^{\psi(\mathbf{r}_1) + \psi^*(\mathbf{r}_2)} \right\rangle \approx e^{\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle}.$$

Siste trinn er å beregne korrelasjonsfunksjonen

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \propto \left\langle e^{\psi(\mathbf{r}_1) + \psi^*(\mathbf{r}_2) + \psi(\mathbf{r}_3) + \psi^*(\mathbf{r}_4)} \right\rangle.$$

Fra første moment overlever i så fall

$$\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_3) \rangle + \langle \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_4) \rangle - \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^2(\mathbf{r}_1) \rangle - \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_2) \rangle - \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^2(\mathbf{r}_3) \rangle - \frac{1}{2} \langle \varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_4) \rangle,$$

mens fra andre moment overlever

$$\left\langle (\varepsilon_1(\mathbf{r}_1) + \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) + \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) + \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4))^2 \right\rangle,$$

som igjen kan omformes til

$$\begin{aligned} & \langle \varepsilon_1^2(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle \varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_1^2(\mathbf{r}_3) \rangle + \langle \varepsilon_1^{*2}(\mathbf{r}_4) \rangle \\ & + 2 \left[\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4) \rangle \right] \\ & + 2 \left[\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \rangle + \langle \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4) \rangle \right]. \end{aligned}$$

Til sammen får vi altså (etter å ha igjen sløffet alt relatert til m_1^2)

$$\begin{aligned} \left\langle e^{\psi(\mathbf{r}_1) + \psi^*(\mathbf{r}_2) + \psi(\mathbf{r}_3) + \psi^*(\mathbf{r}_4)} \right\rangle & \approx e^{\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}_3) \rangle + \langle \varepsilon_2^*(\mathbf{r}_4) \rangle} \times \\ & e^{\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4) \rangle + \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}_1) \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \rangle + \langle \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_2) \varepsilon_1^*(\mathbf{r}_4) \rangle}. \end{aligned}$$

For beregningen av midlet feltstyrke og korrelasjonsfunksjonene behøver man altså kun å beregne tre forventningsverdier basert på de første to iterasjonene til Bornrekken. Disse er

$$\begin{aligned} M_1(\mathbf{r}) & = \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle \\ M_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}) & = \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle \\ M_3(\mathbf{r}, \mathbf{s}) & = \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle. \end{aligned}$$

Med disse forventningsverdiene kan man nå formulere

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{M_1(\mathbf{r})} \\ \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_2) e^{M_1(\mathbf{r}_1) + M_1^*(\mathbf{r}_2) + M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} \\ \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) & \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_2) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_3) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_4) e^{M_1(\mathbf{r}_1) + M_1^*(\mathbf{r}_2) + M_1(\mathbf{r}_3) + M_1^*(\mathbf{r}_4)} \times \\ & e^{M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + M_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) + M_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + M_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + M_3^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)}. \end{aligned}$$

De tre forventningsverdiene står derfor veldig sentralt i Rytovapproximasjonen. Det samme gjør de to første leddene i utviklingen av Bornrekken.

3 Paraksiale stråler og Gaußstråler

Som skrevet i kapittel 2.1, så kan den ikke-perturberte løsningen til Helmholtzlikningen for eksempel være en sfærisk bølge, en planbølge, eller en paraksial stråle. Av disse tre muligheter så er beskrivelsen til en laserstråle ved en paraksial stråle den mest egnete. Utgangspunkt til en paraksial stråle kan for eksempel være en sfærisk s -bølge (det vil si med forsvinnende angulært moment), ved stor avstand fra kilden, altså

$$\frac{1}{2ikr} e^{ikr} = \frac{1}{2i} e^{ikr - \ln(kr)}.$$

Vi definerer nå strålens retning som z -akse, mens koordinaten loddrett på stråleretningen blir den todimensjonale vektoren $\vec{\varrho}$. Til sammen gjelder

$$r = \sqrt{z^2 + \varrho^2} = z \sqrt{1 + \frac{\varrho^2}{z^2}}.$$

En paraksial stråle er nå en stråle som er nokså kollimert i stråleretningen. Det vil si at feltstyrken eller intensiteten loddrett på stråleretningen avtar veldig raskt, altså selv for små verdier av ϱ . Med andre ord, så er man kun interessert i feltstyrken så lenge $\varrho \ll z$. Hvis vi nå utvikler kvadratrotten for små verdier av $\frac{\varrho}{z}$, så får vi

$$r \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{z^2} \right) = z + \frac{\varrho^2}{2z}.$$

Det betyr at hele eksponenten til den sfæriske bølgen approksimeres ved

$$ikr - \ln(kr) \approx ikz + \frac{ik\varrho^2}{2z} - \ln(kz) - \ln \left(1 + \frac{\varrho^2}{2z^2} \right),$$

der det siste leddet kan neglisjeres, siden det er omtrent $\ln \left(1 + \frac{\varrho^2}{2z^2} \right) \approx \frac{\varrho^2}{2z^2}$, det vil si det tilsvarer et høyere-ordens ledd. Til sammen blir uttrykket til

$$\frac{1}{2ikz} e^{ikz + \frac{ik\varrho^2}{2z}},$$

som er altså en paraksial stråle fra en punktkilde (siden utgangspunktet, det vil si den sfæriske bølgen også er basert naturlig nok på en punktkilde).

For å beregne videre ledd i Bornrekken jamført kapittel 2.1 trenger vi også Greensfunksjonen i en approksimasjon som tilsvarer en paraksial stråle. Greensfunksjonen til Helmholtzlikningen var gitt ved

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Her har vi to sett med koordinater som vi kommer til å kalle

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\vec{\varrho}, z) \\ \mathbf{r}' &= (\vec{\varrho}', z') \end{aligned}$$

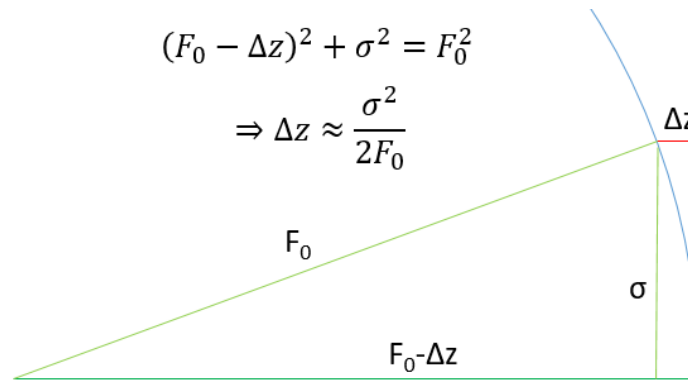
og som oppfyller

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(z - z')^2 + (\vec{\varrho} - \vec{\varrho}')^2} \approx (z - z') + \frac{(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}')^2}{2(z - z')}$$

under liknende antakelser som for approksimasjonen av bølgeløsningen. Her er $\vec{\varrho} - \vec{\varrho}'$ differansen til de to todimensjonale vektorene (koordinatparene) $\vec{\varrho}$ og $\vec{\varrho}'$. Med helt tilsvarende trinn som for bølgeløsningen får vi en approksimert Greensfunksjon i form av

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \approx -\frac{1}{4\pi(z - z')} e^{ik(z - z') + \frac{ik(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}')^2}{2(z - z')}}.$$

Nå har vi fått både den ikke-perturberte løsningen og Greensfunksjonen i en form som er velegnet til å beskrive en paraksial stråle. I et tredje trinn ønsker vi å generalisere fra en punktkilde til en stråle som har en gitt bredde og divergens. Helt konkret ønsker vi å beskrive en Gaußstråle som har en amplitudeprofil til en Gaußfordeling i både x - og y -retningen med (i et gitt kildeplan) en bredde W_0 og en krumningsradius til fasefronten F_0 , der en konvergent stråle tilsvarer en positiv verdi og en divergent stråle som tegnet i Figur 3.1 en negativ verdi (en plan fasefront tilsvarer $|F_0| \rightarrow \infty$).



Figur 3.1 Fasefront (blå kurve) i forhold til $z = 0$ planet (blå linje). Krumningsradius til fasefronten F_0 gjør at for en divergent stråle, så er faseren ved avstand σ fra akse $ik\Delta z = ik\frac{\sigma^2}{2F_0}$ bak faseren på akse. Denne faseforskyvningen må altså legges på, men siden krumningsradius er definert som negativ for en divergent stråle, så får leddet et minustegn.

Ved $z = 0$ er profilen til Gaußstrålen dermed gitt ved

$$A_0 e^{-\frac{\sigma^2}{w_0^2} - ik\frac{\sigma^2}{2F_0}} = A_0 e^{-\frac{\alpha_0}{2} k \sigma^2}$$

der vi har introdusert med $\alpha_0 = \frac{2}{kw_0^2} + \frac{i}{F_0}$ den komplekse stråleparameteren.²

²Det er en hel teori knyttet til denne stråleparameteren. For eksempel, så kan man generalisere relasjonen mellom stråleparameteren på den ene siden og strålebredden og krumningsradiet til fasefronten på den andre side for alle punkter z langs stråleretningen. For dette introduserer man en z -avhengig stråleparameter (se lenger nede i dette kapittelet). Videre kan stråleparameteren påvirkes av optiske elementer, som vi kommer tilbake til i kapittel 6 og spesielt 7. Til slutt er ingen teori komplett uten konkurrerende notasjoner. Spesielt i laserfysikken finner man en annen kompleks stråleparameter gitt ved $q = \frac{i}{\alpha}$. Vi kommer til å utelukkende bruke α i denne rapporten.

I følge Huygens-Fresnelprinsippet, så kan vi nå ta hvert punkt i $z = 0$ planet som en punktkilde som hver sender sin paraksial stråle langs z -aksen. Samlet effekt får vi da ved å integrere over hele $z = 0$ planet, det vil si, vi får en stråle i z -retningen som er gitt ved

$$\frac{k^2}{\pi} \int A_0 e^{-\frac{\alpha_0}{2} k \sigma^2} \frac{1}{2ikz} e^{ikz + \frac{ik(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}')^2}{2z}} d^2\sigma.$$

Her har vi i tillegg introdusert riktig normering ved $\frac{k^2}{\pi}$ jamført utgangspunktet som var en sfærisk s -bølge.

Selve integrasjonen gir som resultat

$$\frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z} e^{ikz - \frac{1}{1 + i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \rho^2} = A(z) e^{ikz - \frac{\alpha(z)}{2} k \rho^2},$$

der vi har introdusert

$$A(z) = \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z}$$

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_0}{1 + i\alpha_0 z},$$

altså en amplitude og kompleks stråleparameter som funksjon av avstand i z -retning.³ Den komplekse stråleparameteren kan som vanlig relateres til strålebredden og krumningsradiet til fasefronten ved det generaliserte uttrykket $\alpha(z) = \frac{2}{kW^2(z)} + \frac{i}{F(z)}$, som blir grundig diskutert i kapittel 7. Uansett er det denne ikke-perturberte løsningen tilsvarende en Gaußstråle, som vi kommer til å bruke som $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ i maskineriet for å beregne leddene i Bornrekken og for å videre beregne de tre forventningsverdiene fra kapittel 2.3. Det hadde selvfølgelig også vært mulig å bruke en annen amplitudeprofil for strålen, som for eksempel en Laguerre-Gaußstråle eller en Hermite-Gaußstråle. Den enkle amplitudeprofilen tilsvarende en Gaußfordeling gjør at formlene blir litt enklere. Dessuten har mange laserstråler nettopp en slik amplitudeprofil.

³Disse to funksjoner beskriver altså propagasjonen av en Gaußstråle langs en strekning.

4 To ledd i Bornrekken

Siden alt er på plass, kan vi nå formulere de første to leddene i Bornrekken jamført kapittel 2.1. Første ledd blir da

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{A_0 k^2}{2\pi} \iint \frac{1}{z-z'} e^{ik(z-z') + \frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} e^{ikz' - \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} v(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz'.$$

For å beregne første ledd til den normerte Bornrekken må vi i tillegg dele med $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ og vi får

$$\varepsilon_1(\mathbf{r}) = \frac{k^2(1+i\alpha_0 z)}{2\pi} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} \iint \frac{1}{z-z'} e^{\frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} v(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz'.$$

Andre ledd i Bornrekken benytter seg av første ledd og er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) &= \frac{k^2}{2\pi} \iint \frac{1}{z-z'} e^{ik(z-z') + \frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \mathbf{E}_1(\bar{\varrho}', z') v(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz' \\ &+ \frac{A_0 k^2}{4\pi} \iint \frac{1}{z-z'} e^{ik(z-z') + \frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} e^{ikz' - \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} v^2(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz', \end{aligned}$$

som igjen skal deles med $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ for å gi det andre leddet til den normerte Bornrekken. Her får vi altså

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{r}) &= \frac{k^2(1+i\alpha_0 z)}{2\pi A_0} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} \iint \frac{1}{z-z'} e^{-ikz' + \frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \mathbf{E}_1(\bar{\varrho}', z') v(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz' \\ &+ \frac{k^2(1+i\alpha_0 z)}{4\pi} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} \iint \frac{1}{z-z'} e^{\frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} v^2(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz', \end{aligned}$$

eller, hvis vi setter inn uttrykket for $\mathbf{E}_1(\bar{\varrho}', z')$ i det første leddet, så får vi

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{r}) &= \frac{k^4(1+i\alpha_0 z)}{4\pi^2} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} \iint \frac{1}{z-z'} e^{\frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} v(\bar{\varrho}', z') \times \\ &\left[\iint \frac{1}{z'-z''} e^{\frac{ik(\bar{z}'-\bar{z}'')^2}{2(z'-z'')}} \frac{1}{1+i\alpha_0 z''} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z''} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho''^2} v(\bar{\varrho}'', z'') d^2 \varrho'' dz'' \right] d^2 \varrho' dz' \\ &+ \frac{k^2(1+i\alpha_0 z)}{4\pi} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} \iint \frac{1}{z-z'} e^{\frac{ik(\bar{z}-\bar{z}')^2}{2(z-z')}} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} v^2(\bar{\varrho}', z') d^2 \varrho' dz'. \end{aligned}$$

5 Tre forventningsverdier

Prinsipielt, hvis man kjente helt nøyaktig tilstanden til atmosfæren langs hele stråleretningen, det vil si hvis man visste avhengigheten av brytningsindeksen fra posisjonen, så kunne man simpelthen beregne de to første leddene til Bornrekken ved integrasjon. Dessverre så har man ikke en så detaljert kunnskap, og uansett, så hadde tilstanden forandret seg ganske fort – gjerne innen noen få sekunder. Det man derimot vet med en ganske god presisjon er fordelingen av brytningsindeksen langs stråleretningen og i tid. Hva man derfor kan gjøre er å sette inn mange konkrete eksempler til denne fordelingen i integralene og dermed beregne fordelingene til de to første leddene til Bornrekken. Alternativt, som vi har diskutert i kapittel 2.2, så er enhver fordeling karakterisert ved alle dens momenter. Derfor kan vi likedan beregne momentene (forventningsverdiene) til de to første leddene til Bornrekken. Spesielt fant vi at det er ønskelig å beregne forventningsverdiene

$$\begin{aligned} M_1(\mathbf{r}) &= \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle \\ M_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}) &= \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle \\ M_3(\mathbf{r}, \mathbf{s}) &= \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle \end{aligned}$$

jamført kapittel 2.3. Med betegnelsen $\mathbf{s} = (\vec{\sigma}, \zeta)$, så betyr det at vi ikke skal beregne momenter over fordelingen til $\nu(\vec{\varrho}, z)$, men over korrelasjonsfunksjonen⁴

$$R_\nu(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \langle \nu(\vec{\varrho}, z) \nu(\vec{\sigma}, \zeta) \rangle.$$

Her får vi hjelp av Wiener-Khinchinteoromet som sier at for et homogent stokastisk felt (et stokastisk felt der fordelingen forblir invariant ved en vilkårlig translasjon), så eksisterer

$$R_\nu(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \int e^{i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}-\mathbf{s})} dF(\boldsymbol{\kappa})$$

som et Stieltjesintegral. Hvis $F(\boldsymbol{\kappa})$ er en absolutt kontinuerlig funksjon, så eksisterer i tillegg en ekte Fouriertransformert til korrelasjonsfunksjonen i form av

$$R_\nu(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = \int e^{i\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}-\mathbf{s})} \Phi(\boldsymbol{\kappa}) d^3\boldsymbol{\kappa}.$$

Hvis $\nu(\vec{\varrho}, z)$ er et reelt felt, så er R_ν i tillegg en symmetrisk funksjon, som betyr at

$$R_\nu(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = R_\nu(\mathbf{s} - \mathbf{r}).$$

Vi antar her at alle disse betingelser er oppfylt. Videre, så gjør vi en forenkling ved at vi antar at spektralfunksjonen $\Phi(\boldsymbol{\kappa})$ er uavhengig av komponenten κ_z . Hvis vi skriver $\boldsymbol{\kappa} = (\vec{\kappa}, \kappa_z)$, der $\vec{\kappa}$ er en todimensjonal vektor (et koordinatpar) i (x, y) -planet, så betyr det at

$$\begin{aligned} R_\nu(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}, z - \zeta) &= \iint e^{i[\vec{\kappa}(\vec{\varrho}-\vec{\sigma}) + \kappa_z(z-\zeta)]} \Phi(\vec{\kappa}) d^2\kappa d\kappa_z \\ &= 2\pi\delta(z - \zeta) \int e^{i\vec{\kappa}(\vec{\varrho}-\vec{\sigma})} \Phi(\vec{\kappa}) d^2\kappa, \end{aligned}$$

⁴Dette er fordi $\varepsilon_2 \propto \nu^2$ mens $\varepsilon_1 \propto \nu$, som derimot opptrer kun i kvadratiske ledd i forventningsverdiene.

med andre ord, så er korrelasjonsfunksjonen δ -korrelert i z -retningen. Vi skal bruke denne forenklingen kun for de tilfellene der vi ikke evaluerer korrelasjonsfunksjonen ved nullpunktet. I det tilfellet der vi kun er interessert i $R_\nu(0)$, så har vi selvfølgelig

$$R_\nu(0) = \int \Phi(\kappa) d^3\kappa.$$

Vi formulerer forventningsverdiene ved hjelp av korrelasjonsfunksjonen som

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{k^4(1+i\alpha_0 z)}{2\pi} \iiint \frac{1}{z-z'} \frac{1}{z'-z''} \frac{1}{1+i\alpha_0 z''} \delta(z'-z'') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ & e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} e^{\frac{ik(\bar{\varrho}-\bar{\varrho}')^2}{2(z-z')}} e^{\frac{ik(\bar{\varrho}'-\bar{\varrho}'')^2}{2(z'-z'')}} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z''} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho''^2} e^{i\vec{\kappa}(\bar{\varrho}'-\bar{\varrho}'')} d^2\kappa d^2\varrho' d^2\varrho'' dz'', \\ + \frac{k^2(1+i\alpha_0 z)}{4\pi} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} R_\nu(0) \iint \frac{1}{z-z'} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} e^{\frac{ik(\bar{\varrho}-\bar{\varrho}')^2}{2(z-z')}} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} d^2\varrho' dz', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle &= \frac{k^4(1+i\alpha_0 z)(1-i\alpha_0^* \zeta)}{2\pi} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} e^{\frac{1}{1-i\alpha_0^* \zeta} \frac{\alpha_0^*}{2} k \sigma^2} \times \\ & \iiint \frac{1}{z-z'} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{1}{\zeta-\zeta'} \frac{1}{1-i\alpha_0^* \zeta'} \delta(z'-\zeta') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ & e^{\frac{ik(\bar{\varrho}-\bar{\varrho}')^2}{2(z-z')}} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} e^{-\frac{ik(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}')^2}{2(\zeta-\zeta')}} e^{-\frac{1}{1-i\alpha_0^* \zeta'} \frac{\alpha_0^*}{2} k \sigma'^2} e^{i\vec{\kappa}(\bar{\varrho}'-\bar{\sigma}')} d^2\kappa d^2\varrho' d^2\sigma' d\zeta' \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle &= \frac{k^4(1+i\alpha_0 z)(1+i\alpha_0 \zeta)}{2\pi} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho^2} e^{\frac{1}{1+i\alpha_0 \zeta} \frac{\alpha_0}{2} k \sigma^2} \times \\ & \iiint \frac{1}{z-z'} \frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{1}{\zeta-\zeta'} \frac{1}{1+i\alpha_0 \zeta'} \delta(z'-\zeta') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ & e^{\frac{ik(\bar{\varrho}-\bar{\varrho}')^2}{2(z-z')}} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z'} \frac{\alpha_0}{2} k \varrho'^2} e^{\frac{ik(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}')^2}{2(\zeta-\zeta')}} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 \zeta'} \frac{\alpha_0}{2} k \sigma'^2} e^{i\vec{\kappa}(\bar{\varrho}'-\bar{\sigma}')} d^2\kappa d^2\varrho' d^2\sigma' d\zeta', \end{aligned}$$

som stort sett er åttefold integraler som vi skal evaluere. Vi integrerer først over de transversale koordinatene. Disse opptrer kun i argumentene til eksponentialfunksjonene. Man innser nå at

$$\int e^{-\lambda \varrho^2 + i\vec{\mu} \bar{\varrho}} d^2\varrho = \int e^{-\lambda [\bar{\varrho} - \frac{i}{2\lambda} \vec{\mu}]^2 - \frac{\mu^2}{4\lambda}} d^2\varrho = \frac{\pi}{\lambda} e^{-\frac{\mu^2}{4\lambda}}.$$

Dette kan vi anvende gjentatte ganger og får dermed

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= -2\pi k^2 \iiint \delta(z'-z'') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ & e^{\frac{ik}{2(z-z')} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \varrho^2} e^{-\frac{i(z'-z'')}{2k} \frac{1+i\alpha_0 z''}{1+i\alpha_0 z'} k^2} e^{-\frac{i(z-z')}{2k} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \left[\frac{i\alpha_0(z'-z'')}{1+i\alpha_0 z'} \vec{\kappa} - \frac{k}{z-z'} \bar{\varrho} \right]^2} d^2\kappa dz' dz'', \\ + \frac{ik}{2} R_\nu(0) \int e^{\frac{ik}{2(z-z')} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \varrho^2} e^{-\frac{ik}{2(z-z')} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \varrho^2} dz', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle &= 2\pi k^2 \iiint \delta(z'-\zeta') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ & e^{\frac{ik}{2(z-z')} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \varrho^2} e^{-\frac{ik}{2(\zeta-\zeta')} \frac{1-i\alpha_0^* \zeta'}{1-i\alpha_0^* \zeta} \sigma^2} e^{-\frac{i(z-z')}{2k} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \left[\vec{\kappa} - \frac{k}{z-z'} \bar{\varrho} \right]^2} e^{\frac{i(\zeta-\zeta')}{2k} \frac{1-i\alpha_0^* \zeta'}{1-i\alpha_0^* \zeta} \left[\vec{\kappa} - \frac{k}{\zeta-\zeta'} \bar{\sigma} \right]^2} d^2\kappa dz' d\zeta' \end{aligned}$$

og

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r})\varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle = -2\pi k^2 \iiint \delta(z' - \zeta') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ e^{\frac{ik}{2(z-z')} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \varrho^2} e^{\frac{ik}{2(\zeta-\zeta')} \frac{1+i\alpha_0 \zeta'}{1+i\alpha_0 \zeta} \sigma^2} e^{-\frac{i(z-z')}{2k} \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z} \left[\vec{\kappa} - \frac{k}{z-z'} \vec{\varrho} \right]^2} e^{-\frac{i(\zeta-\zeta')}{2k} \frac{1+i\alpha_0 \zeta'}{1+i\alpha_0 \zeta} \left[\vec{\kappa} + \frac{k}{\zeta-\zeta'} \vec{\sigma} \right]^2} d^2 \kappa dz' d\zeta'$$

altså stort sett firefold integraler.

I neste trinn, så kan man enkelt integrere over én av koordinatene som inngår i argumentene til deltafunksjonene. Men her er det én ting man må passe på. Mens vi integrerer over koordinatene z' og ζ' hver for seg mellom origo (strålekilden) og henholdsvis z eller ζ (punkter av interesse i rommet), så skal vi i tilfellet $\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle$ integrere over koordinaten z'' mellom origo og kun z' . (Over z' koordinaten skal vi selvfølgelig integrere som før mellom origo og z .) Det betyr at i så fall, så bidrar integralet over deltafunksjonen kun med halvparten, eller med andre ord, vi må gange det første leddet i uttrykket for $\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle$ med en faktor $\frac{1}{2}$. I tillegg, så forenkler vi argumentene til eksponentialfunksjonene. Videre innfører vi en forenklet skrivemåte ved $\gamma_z = \frac{1+i\alpha_0 z'}{1+i\alpha_0 z}$ og en liknende γ_ζ der z -koordinaten er byttet om til ζ -koordinaten. Med alt dette får vi

$$\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle = -\pi k^2 \iint \Phi(\vec{\kappa}) d^2 \kappa dz' + \frac{ik}{2} R_\nu(0) \int dz',$$

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r})\varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle = 2\pi k^2 \iint \Phi(\vec{\kappa}) e^{i(\gamma_z \vec{\varrho} - \gamma_\zeta^* \vec{\sigma}) \vec{\kappa}} e^{-\frac{i}{2k} [\gamma_z(z-z') - \gamma_\zeta^*(\zeta-z')] \kappa^2} d^2 \kappa dz'$$

og

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r})\varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle = -2\pi k^2 \iint \Phi(\vec{\kappa}) e^{i(\gamma_z \vec{\varrho} - \gamma_\zeta \vec{\sigma}) \vec{\kappa}} e^{-\frac{i}{2k} [\gamma_z(z-z') + \gamma_\zeta(\zeta-z')] \kappa^2} d^2 \kappa dz'.$$

Her ser vi at uttrykket for $\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle$ ikke avhenger av noen transversal koordinat. Videre, så er integrandene i uttrykket for $\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle$ ikke avhengig av koordinaten z' mere, som betyr at vi kan forenkle uttrykket til

$$\langle \varepsilon_2(z) \rangle = -\pi k^2 z \int \Phi(\vec{\kappa}) d^2 \kappa + \frac{ikz}{2} R_\nu(0).$$

Ofte gjør man to forenklinger til. For det første, så er man vanligvis ikke interessert i forventningsverdier som involverer forskjellige z og ζ . Isteden så tenker man seg heller et detektorplan ved $z = \zeta$, der man ser på korrelasjoner kun i transversal retning. Vi kan altså forenkle alle uttrykk ved å sette z og ζ like. Det betyr blant annet at også $\gamma_z = \gamma_\zeta$ og derfor kommer vi til å sløyfe indeksen til γ fra nå av. Videre, så antar man gjerne at $\nu(\mathbf{r})$ er et isotropt stokastisk felt, som betyr at korrelasjonsfunksjonen R_ν kun avhenger av den (skalare) avstanden, ikke av retningen. Matematisk betyr det at

$$R_\nu(\mathbf{r} - \mathbf{s}) = R_\nu(|\mathbf{r} - \mathbf{s}|),$$

som igjen betyr at spektralfunksjonen kun avhenger av en radiell komponent κ . Vi kan derfor dele opp integralet over $\vec{\kappa}$ i et radielt integral og et asimutalt integral, som vi kan evaluere. Til sammen får vi dermed

$$\langle \varepsilon_2(z) \rangle = -2\pi^2 k^2 z \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa + \frac{ikz}{2} R_\nu(0),$$

$$\langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z)\varepsilon_1^*(\vec{\sigma}, z) \rangle = 4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) J_0(|\gamma \vec{\varrho} - \gamma^* \vec{\sigma}| \kappa) e^{-\frac{i}{2k}(z-z')(\gamma-\gamma^*)\kappa^2} \kappa d\kappa dz'$$

og

$$\langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1(\vec{\sigma}, z) \rangle = -4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) J_0(\gamma |\vec{\varrho} - \vec{\sigma}| \kappa) e^{-\frac{i}{k}(z-z')\gamma \kappa^2} \kappa d\kappa dz'.$$

Her må man passe på at absoluttverdien i argumentet til Besselfunksjonen i uttrykket for $\langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1^*(\vec{\sigma}, z) \rangle$ kun skal bety at man er interessert i lengden til vektoren $\gamma\vec{\varrho} - \gamma^*\vec{\sigma}$ – den komplekse fasen skal beholdes og skulle egentlig stå utenfor absoluttverdien. Med andre ord, så er det komplekse argumentet til Besselfunksjonen gitt ved

$$|\gamma\vec{\varrho} - \gamma^*\vec{\sigma}| \kappa = \sqrt{\gamma^2 \varrho^2 + \gamma^{*2} \sigma^2 - 2|\gamma|^2 \vec{\varrho} \vec{\sigma} \kappa}.$$

Derfor kan uttrykket også skrives som

$$\langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1^*(\vec{\sigma}, z) \rangle = 4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) J_0\left(\sqrt{\gamma^2 \varrho^2 + \gamma^{*2} \sigma^2 - 2|\gamma|^2 \vec{\varrho} \vec{\sigma} \kappa}\right) \times e^{\frac{1}{k}(z-z')\Im(\gamma)\kappa^2} \kappa d\kappa dz'.$$

Med dette har vi klart å forenkle integralene så mye som mulig. Det som er interessant er at momentene i vår forenkling (spesielt på grunn av betingelsen $z = \zeta$) ikke er funksjoner av alle koordinater mere, men kun av de transversale koordinatene (der det er relevant) pluss en felles koordinat z i stråleretningen. Hermed kan vi nå formulere midlet feltstyrke og korrelasjonsfunksjonene som

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &\approx \mathbf{E}_0(\vec{\varrho}, z) e^{M_1(z)} \\ \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) &\approx \mathbf{E}_0(\vec{\varrho}_1, z) \mathbf{E}_0^*(\vec{\varrho}_2, z) e^{2\Re(M_1(z)) + M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z)} \\ \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, \vec{\varrho}_3, \vec{\varrho}_4, z) &\approx \mathbf{E}_0(\vec{\varrho}_1, z) \mathbf{E}_0^*(\vec{\varrho}_2, z) \mathbf{E}_0(\vec{\varrho}_3, z) \mathbf{E}_0^*(\vec{\varrho}_4, z) e^{4\Re(M_1(z))} \times \\ &\quad e^{M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) + M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_4, z) + M_2(\vec{\varrho}_3, \vec{\varrho}_2, z) + M_2(\vec{\varrho}_3, \vec{\varrho}_4, z) + M_3(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_3, z) + M_3^*(\vec{\varrho}_2, \vec{\varrho}_4, z)}. \end{aligned}$$

Det som er litt morsomt å se er at det imaginære leddet til $\langle \varepsilon_2(z) \rangle$ kanselleres i uttrykkene til korrelasjonsfunksjonene, mens det gir kun en felles faseforskyvning for hele detektorplanet i uttrykket til den midlele feltstyrken. Det er derfor kanskje ikke så rart at akkurat det leddet (som er basert på $v^2(\mathbf{r})$ leddet i Helmholtzlikningen jamført kapittel 2.1) ofte neglisjeres helt fra begynnelsen, selv om det dreier seg om et fullgodt andre ordens ledd.

6 Matriseoptikk

I noen anvendelser er det ønskelig å knytte sammen formalismen som beskriver turbulens med formalismen som beskriver optiske elementer, altså matriseoptikken. Det kan for eksempel forenkles en situasjon der en laserstråle før og/eller etter en lengre strekning gjennom atmosfæren også går gjennom en eller flere optiske elementer, som linser, speil eller blenderåpninger. En annen situasjon kan være at man har flere strekninger med turbulens med optiske elementer mellom strekningene. Et eksempel kunne vært en laserstråle som blir speilet tilbake den samme lange strekningen gjennom atmosfæren hvis man setter opp laserkilden og detektoren ved siden av hverandre. Videre, så trenger ikke turbulens å være knyttet til lange strekninger gjennom atmosfære. Selv for små avstander i et laboratorium (typisk 1 m) kan en laserstråle bli påvirket av turbulens. I et større oppsett med flere speil eller andre elementer (og strekninger imellom) kan det derfor være en stor fordel å kunne beskrive alt sammen med en konsistent formalisme. Også i store teleskoper, selv om man prøver så godt man kan å redusere alt av temperaturgradienter og -svingninger, kan det oppstå turbulent luftbevegelse mellom for eksempel hovedspeilet og detektorplanet. Det kommer i så fall i tillegg til atmosfærisk turbulens. Også her kan man dra nytte av å ha en formalisme der man knytter sammen beskrivelsen av turbulens i mer enn én strekning med optiske elementer imellom. Det er denne formalismen vi ønske å beskrive i det følgende.

6.1 Enkle optiske matriser

I matriseoptikk, så definerer man koordinater i forhold til en optisk akse z . Typisk kan man tenke seg en stråle ved avstand r_1 fra den optiske aksens, med stigning (eller vinkel) r'_1 i forhold til den optiske aksens. Siden vi kun skal betrakte paraksiale stråler, så har vi nemlig $r' = \tan \varphi \approx \varphi$. Et stykke L langs den optiske aksens finner vi derfor strålen igjen ved avstand $r_2 = r_1 + Lr'_1$ og med sammen vinkel $r'_2 = r'_1$ i forhold til den optiske aksens. Vi kan derfor relatere koordinatene ved utgangspunktet til koordinatene ved L gjennom

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix},$$

som samtidig definerer den optiske matrisen for propagasjon av en stråle langs en strekning L . I litt mere avanserte tilfeller, som for eksempel ioneoptikk, så brukes gjerne separate koordinater for x - og y -aksene, men vi skal begrense oss til kun en radiell koordinat og sylinder-symmetriske stråler.

En strekning L kan også deles opp i for eksempel to deler $L_1 + L_2$. Prinsipielt kan vi formulere en optisk matrise til hver delstrekning. Til sammen får man da

$$\begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

altså akkurat det man hadde forventet.

Generelt kan en optisk matrise ha nokså vilkårlige, til og med komplekse, elementer

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

med den innskrenkningen at determinanten til matrisen må være $AD - BC = 1$. Optiske matriser til en lang rekke enkle optiske elementer er diskutert i vedlegg B.

6.2 Paraksiale stråler

For å kunne bruke matriseoptikk sammen med paraksiale stråler må man finne en måte å relatere relevante størrelser før og etter optiske elementer med hverandre gjennom matriseelementene. For paraksiale stråler gjelder approksimasjonen $\Delta\varphi = k\Delta z \approx \frac{kr^2}{2z} \approx \frac{kr r'}{2}$, hvor vi i det siste trinnet har formulert faseforskyvningen i de to parameterne – avstand fra optisk akse og stigning – som også brukes i matriseoptikk.⁵ Faseforskyvningen til en paraksial stråle ved gjennomgang av et optisk system kan dermed beskrives ved

$$\Delta\varphi_{\text{opt}} = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = \frac{k}{2} [r_2 r'_2 - r_1 r'_1].$$

Nå er disse fire størrelser ikke uavhengige fra hverandre – for eksempel kan parameterne (r_2, r'_2) beregnes ut av parameterne (r_1, r'_1) nettopp ved hjelp av den optiske matrisen. Siden man til slutt ønsker å beregne de relevante parameterne til en Gaußstråle, så er det mest fordelaktig å eliminere stigningene (r'_1, r'_2) . For dette benytter vi oss av en partiell invertering av den optiske matrisen, som gir

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} -A & 1 \\ -1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

hvor vi har benyttet oss av at determinanten til den opprinnelige optiske matrisen $AD - BC = 1$. Med dette formulerer vi faseforskyvningen som

$$\Delta\varphi_{\text{opt}} = \frac{k}{2B} [Ar_1^2 - 2r_1 r_2 + Dr_2^2].$$

Vi begrenser oss nå til en Gaußstråle, som er gitt ved stråleradius W_0 og krumning til fasefronten F_0 og som til sammen modelleres ved den komplekse parameteren $\alpha_0 = \frac{2}{kW_0^2} + \frac{i}{F_0}$ jmført kapittel 3. Dermed er den radiusavhengige faseforskyvningen⁶ ved kildeplanet til et optisk system gitt ved $i\Delta\varphi_1(r_1) = -\frac{\alpha_0}{2}kr_1^2$. Ved detektorplanet til det optiske systemet har Gaußstrålen i tillegg fått faseforskyvningen $i\Delta\varphi_{\text{opt}}$. For å beregne den radiusavhengige faseforskyvningen i detektorplanet til det optiske systemet anvender vi igjen Huygens-Fresnelprinsippet og får på lignende måte som i kapittel 3

$$\frac{k^2}{\pi} \int A_0 e^{-\frac{\alpha_0}{2}kr_1^2} \frac{1}{2ikB} e^{\frac{ik}{2B}[Ar_1^2 - 2r_1 r_2 + Dr_2^2]} d^2r_1,$$

der normeringen ved $\frac{k^2}{\pi}$ til Gaußstrålen er som før, og normeringen $\frac{1}{2ikB}$ til den matriseoptiske Greensfunksjonen er helt analogt normering til den paraksiale Greensfunksjonen fra kapittel 3. Selve integrasjonen gir som resultat⁷

$$\frac{A_0}{A + i\alpha_0 B} e^{-\frac{kr_2^2}{2} \left(\frac{\alpha_0 D - iC}{A + i\alpha_0 B} \right)} = \mathcal{A}^M e^{-\frac{\alpha^M}{2}kr_2^2},$$

⁵Likningen for faseforskyvningen gjelder selvfølgelig alle stråler, ikke kun de som har utgangspunkt i den optiske aksene. Dermed skulle egentlig r (og z) formuleres som differanser Δr og Δz i denne likningen (som igjen fører til at Δz egentlig burde formuleres som $\Delta\Delta z$). Dermed hadde bruken av $r' = \frac{\Delta r}{\Delta z}$ blitt selvforklarende, men også likningen blitt ganske uleselig.

⁶Her, i samsvar med blant annet vedlegg B.4, så betyr en (negativ) reell del til $i\Delta\varphi$ en eksponentiell demping av feltet, mens imaginærdelen er en ekte faseforskyvning.

⁷Vi skriver amplitude til matriseoptiske systemer som \mathcal{A} for å bedre kunne skille det fra matriseelementet A .

der vi har introdusert

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^M &= \frac{A_0}{A + i\alpha_0 B} \\ \alpha^M &= \frac{\alpha_0 D - iC}{A + i\alpha_0 B},\end{aligned}$$

altså en amplitude og kompleks stråleparameter som funksjoner av matriseelementene til en generell optisk matrise.⁸ Løsningen er altså igjen en Gaußstråle med amplitude \mathcal{A}^M og en stråleradius W og krumning til fasefronten F som er modellert som vanlig ved den komplekse parameteren $\alpha^M = \frac{2}{kW^2} + \frac{i}{F}$.

Hvis vi for eksempel bruker den optiske matrisen til en Gaußlinse jamført vedlegg B.5 så er parameterne før og etter linsen relatert ved

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^M &= A_0 \\ \alpha^M &= \alpha_0 + \alpha_G,\end{aligned}$$

der α_G karakteriserer Gaußlinsen. Hvis vi isteden bruker en enkel strekning med lengde L (jamført kapittel 6.1) får vi derimot

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^M &= \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 L} = A(L) \\ \alpha^M &= \frac{\alpha_0}{1 + i\alpha_0 L} = \alpha(L),\end{aligned}$$

altså akkurat det samme som i kapittel 3.

6.3 Bornrekken

Med resultatene fra kapittel 6.2 kan vi nå formulere de første to leddene til Bornrekken basert på paraksiale stråler og den matriseoptiske Greensfunksjonen. Her bruker vi altså som ikke-perturbert løsning

$$\mathbf{E}_0(\vec{\varrho}) = \frac{A_0}{A + i\alpha_0 B} e^{-\frac{k\varrho^2}{2} \left(\frac{\alpha_0 D - iC}{A + i\alpha_0 B} \right)},$$

og som matriseoptisk Greensfunksjon

$$G(\vec{\varrho} - \vec{\varrho}') = \frac{1}{2ikB} e^{\frac{ik}{2B} (A\varrho'^2 - 2\vec{\varrho}\vec{\varrho}' + D\varrho^2)}.$$

Legg merke til at for å være konsistent med notasjon i kapittel 4, så erstatter vi r_1 og r_2 fra kapittel 6.2 med henholdsvis ϱ' og ϱ . Hvis vi da sammenlikner funksjonene med utgangspunktet i kapittel 4, så ser man at vi fullstendig mangler noen form for z' -avhengighet. Denne avhengigheten kommer inn igjen når vi ser at de matriseoptiske parameterne A til D nettopp har en slik avhengighet. Dette ser man når man deler opp hele det optiske systemet i en første del (fra 0 til z') og en komplementær del C (fra z' til z). Her gjelder

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^C(z - z') & B^C(z - z') \\ C^C(z - z') & D^C(z - z') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(z') & B(z') \\ C(z') & D(z') \end{pmatrix}.$$

⁸Disse to funksjoner beskriver altså propagasjon av en Gaußstråle gjennom et matriseoptisk system.

Spesielt trenger vi for de ikke-perturberte løsningene $\mathbf{E}_0(\vec{\rho})$ funksjonene $A(z)$ til $D(z)$, mens for Greensfunksjonen trenger vi de komplementære funksjonene $A^C(z-z')$ til $D^C(z-z')$. Funksjonene kan relateres med hverandre ved å invertere matriselikningen og vi får

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(z') & -B(z') \\ -C(z') & A(z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^C(z-z') & B^C(z-z') \\ C^C(z-z') & D^C(z-z') \end{pmatrix},$$

eller

$$\begin{aligned} A^C(z-z') &= A(z)D(z') - B(z)C(z') \\ B^C(z-z') &= B(z)A(z') - A(z)B(z') \\ C^C(z-z') &= C(z)D(z') - D(z)C(z') \\ D^C(z-z') &= D(z)A(z') - C(z)B(z'). \end{aligned}$$

Til slutt, siden vi har gjeninnført z' -koordinaten (som vi skal integrere over), må vi justere også normeringen med en faktor $\frac{k}{2\pi i}$. Til sammen etter litt algebra i eksponentene får man for det første, normerte leddet i Bornrekken

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{r}) &= -\frac{2k^2}{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})} \int \frac{k}{2\pi i} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{E}_0(\mathbf{r}') v(\mathbf{r}') d^3 r' \\ &= \iint \frac{k^2}{2\pi \gamma_z^M B^C(z-z')} e^{\frac{ik}{2\gamma_z^M B^C(z-z')}} (\gamma_z^M \vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 v(\vec{\rho}', z') d^2 \rho' dz', \end{aligned}$$

der vi har innført en forkortet skrivemåte ved

$$\gamma_z^M = \frac{A(z') + i\alpha_0 B(z')}{A(z) + i\alpha_0 B(z)}.$$

Det andre normerte leddet i Bornrekken er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{r}) &= -\frac{2k^2}{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})} \int \frac{k}{2\pi i} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') v(\mathbf{r}') \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}') v(\mathbf{r}') \right] d^3 r' \\ &= \frac{k^4}{4\pi^2} \iiint \frac{v(\vec{\rho}', z') v(\vec{\rho}'', z'')}{B^C(z-z') B^C(z'-z'')} \frac{A(z) + i\alpha_0 B(z)}{A(z'') + i\alpha_0 B(z'')} \times \\ &\quad e^{\frac{ik\gamma_z^M \rho^2}{2B^C(z-z')} - \frac{ik\vec{\rho}\vec{\rho}'}{B^C(z-z')} + \frac{ik\rho'^2}{2}} \left[\frac{A^C(z-z')}{B^C(z-z')} + \frac{D^C(z'-z'')}{B^C(z'-z'')} \right] - \frac{ik\vec{\rho}'\vec{\rho}''}{B^C(z'-z'')} + \frac{ik\rho''^2}{2\gamma_z^M B^C(z'-z'')} d^2 \rho'' dz'' d^2 \rho' dz' \\ &\quad + \iint \frac{k^2}{4\pi \gamma_z^M B^C(z-z')} e^{\frac{ik}{2\gamma_z^M B^C(z-z')}} (\gamma_z^M \vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 v^2(\vec{\rho}', z') d^2 \rho' dz', \end{aligned}$$

der

$$\gamma_{z'}^M = \frac{A(z'') + i\alpha_0 B(z'')}{A(z') + i\alpha_0 B(z')}.$$

6.4 Forventningsverdiene

Med resultatene fra kapittel 6.3 kan vi formulere forventningsverdiene, der vi bruker samme notasjon som i kapittel 5. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{k^4}{2\pi} \iiint \iiint \frac{\delta(z' - z'')}{B^C(z - z') B^C(z' - z'')} \frac{A(z) + i\alpha_0 B(z)}{A(z'') + i\alpha_0 B(z'')} \Phi(\vec{k}) \times \\ &e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} - \frac{ik\bar{\varrho}\bar{\varrho}'}{B^C(z-z')} + \frac{ik\varrho'^2}{2} \left[\frac{A^C(z-z')}{B^C(z-z')} + \frac{D^C(z'-z'')}{B^C(z'-z'')} \right] - \frac{ik\bar{\varrho}'\bar{\varrho}''}{B^C(z'-z'')} + \frac{ik\varrho''^2}{2\gamma_z^M B^C(z'-z'')} + i\vec{k}(\bar{\varrho}' - \bar{\varrho}'')} d^2 \varrho'' dz'' d^2 \varrho' dz' d^2 \kappa \\ &+ R_\nu(0) \iint \frac{k^2}{4\pi\gamma_z^M B^C(z - z')} e^{\frac{ik}{2\gamma_z^M B^C(z-z')} (\gamma_z^M \bar{\varrho} - \bar{\varrho}')^2} d^2 \varrho' dz'. \end{aligned}$$

I første omgang kan vi integrere over de transversale koordinatene $\bar{\varrho}''$ i det øvre integralet og $\bar{\varrho}'$ i det nedre. Til sammen får vi

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= ik^3 \iiint \iiint \frac{\delta(z' - z'')}{B^C(z - z')} \frac{A(z) + i\alpha_0 B(z)}{A(z') + i\alpha_0 B(z')} \Phi(\vec{k}) \times \\ &e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} - \frac{ik\bar{\varrho}\bar{\varrho}'}{B^C(z-z')} + \frac{ik\varrho'^2}{2} \left[\frac{A^C(z-z')}{B^C(z-z')} + \frac{D^C(z'-z'')}{B^C(z'-z'')} \right] - \frac{i\gamma_z^M B^C(z'-z'')}{2k} \left(\frac{k\bar{\varrho}'}{B^C(z'-z'')} + \vec{k} \right)^2 + i\vec{k}\bar{\varrho}'} dz'' d^2 \varrho' dz' d^2 \kappa \\ &+ \frac{ik}{2} R_\nu(0) \int dz'. \end{aligned}$$

For å gjøre videre fremskritt må vi realisere at i det øvre integralet, så har vi

$$\begin{aligned} \frac{A^C(z - z')}{B^C(z - z')} + \frac{D^C(z' - z'')}{B^C(z' - z'')} &= \frac{A^C(z - z') B^C(z' - z'') + B^C(z - z') D^C(z' - z'')}{B^C(z - z') B^C(z' - z'')} \\ &= \frac{B^C(z - z'')}{B^C(z - z') B^C(z' - z'')}, \end{aligned}$$

som følger direkte fra reglene til matrisemultiplikasjon. Dermed kan vi omformulere eksponenten til

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= ik^3 \iiint \iiint \frac{\delta(z' - z'')}{\gamma_z^M B^C(z - z')} \Phi(\vec{k}) \times \\ &e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} + \frac{ik\varrho'^2}{2B^C(z'-z'')} \left[\frac{B^C(z-z'')}{B^C(z-z')} - \gamma_z^M \right] + i \left((1 - \gamma_z^M) \vec{k} - \frac{k\bar{\varrho}}{B^C(z-z')} \right) \bar{\varrho}' - \frac{i\gamma_z^M B^C(z'-z'') \kappa^2}{2k}} dz'' d^2 \varrho' dz' d^2 \kappa \\ &+ \frac{ik}{2} R_\nu(0) \int dz'. \end{aligned}$$

Nå integrerer vi over de resterende transversale koordinatene $\bar{\varrho}'$ i det øvre integralet og får

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= -2\pi k^2 \iiint \iiint \frac{\delta(z' - z'')}{\gamma_z^M B^C(z - z')} \frac{B^C(z' - z'')}{B^C(z - z')} \frac{B^C(z - z'')}{B^C(z - z')} - \gamma_z^M \Phi(\vec{k}) \times \\ &e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} - \frac{i\gamma_z^M B^C(z'-z'') \kappa^2}{2k} - \frac{i}{2k} \frac{B^C(z'-z'')}{B^C(z-z')} \left((1 - \gamma_z^M) \vec{k} - \frac{k}{B^C(z-z')} \bar{\varrho} \right)^2} dz'' dz' d^2 \kappa \\ &+ \frac{ik}{2} R_\nu(0) \int dz'. \end{aligned}$$

Vi forenkler dette uttrykket, siden vi finner med litt algebra at

$$\begin{aligned} \frac{B^C(z' - z'')}{\frac{B^C(z-z')}{B^C(z-z')} - \gamma_z^M} &= \frac{B^C(z' - z'')B^C(z - z')[A(z') + i\alpha_0 B(z')]}{B^C(z - z'')[A(z') + i\alpha_0 B(z')] - B^C(z - z')[A(z'') + i\alpha_0 B(z'')]} \\ &= \gamma_z^M B^C(z - z'). \end{aligned}$$

Når vi bruker denne forenklingen, så forenkler hele forventningsverdien seg til

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle &= -2\pi k^2 \iiint \delta(z' - z'') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ &\quad e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} - \frac{i\gamma_z^M B^C(z'-z'')\kappa^2}{2k} - \frac{i}{2k} \gamma_z^M B^C(z-z') \left((1-\gamma_z^M)\vec{\kappa} - \frac{k}{B^C(z-z')} \vec{\varrho} \right)^2} dz'' dz' d^2\kappa \\ &\quad + \frac{ik}{2} R_V(0) \int dz'. \end{aligned}$$

Når vi så integrerer over z'' i det øvre integralet, så må vi igjen passe på at vi integrerer til nøyaktig z' , som betyr at integralet over deltafunksjonen kun bidrar med halvparten. Det betyr at til sammen får man

$$\langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \rangle = -\pi k^2 \iint \Phi(\vec{\kappa}) dz' d^2\kappa + \frac{ik}{2} R_V(0) \int dz',$$

som er altså helt nøyaktig det samme resultat som før.

Når vi setter opp de andre to forventningsverdiene så får vi

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle &= \frac{k^4}{2\pi} \iiint \iiint \frac{\delta(z' - \zeta') \Phi(\vec{\kappa})}{\gamma_z^M B^C(z - z') [\gamma_\zeta^M B^C(\zeta - \zeta')]^*} \times \\ &\quad e^{\frac{ik}{2\gamma_z^M B^C(z-z')} (\gamma_z^M \vec{\varrho} - \vec{\varrho}')^2 - \frac{ik}{2[\gamma_\zeta^M B^C(\zeta-\zeta')]^*} \left([\gamma_\zeta^M]^* \vec{\sigma} - \vec{\sigma}' \right)^2 + i\vec{\kappa}(\vec{\varrho}' - \vec{\sigma}')} d^2\varrho' dz' d^2\sigma' d\zeta' d^2\kappa \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle &= \frac{k^4}{2\pi} \iiint \iiint \frac{\delta(z' - \zeta') \Phi(\vec{\kappa})}{\gamma_z^M B^C(z - z') \gamma_\zeta^M B^C(\zeta - \zeta')} \times \\ &\quad e^{\frac{ik}{2\gamma_z^M B^C(z-z')} (\gamma_z^M \vec{\varrho} - \vec{\varrho}')^2 + \frac{ik}{2\gamma_\zeta^M B^C(\zeta-\zeta')} (\gamma_\zeta^M \vec{\sigma} - \vec{\sigma}')^2 + i\vec{\kappa}(\vec{\varrho}' - \vec{\sigma}')} d^2\varrho' dz' d^2\sigma' d\zeta' d^2\kappa, \end{aligned}$$

hvor vi har brukt

$$\gamma_\zeta^M = \frac{A(\zeta') + i\alpha_0 B(\zeta')}{A(\zeta) + i\alpha_0 B(\zeta)}.$$

Også her integrerer vi først over de to sett med transversale koordinater og får henholdsvis

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle &= 2\pi k^2 \iiint \delta(z' - \zeta') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ &\quad e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} - \frac{ik[\gamma_\zeta^M]^* \sigma^2}{2[B^C(\zeta-\zeta')]^*} - \frac{i\gamma_z^M B^C(z-z')}{2k} \left(\vec{\kappa} - \frac{k}{B^C(z-z')} \vec{\varrho} \right)^2 + \frac{i[\gamma_\zeta^M B^C(\zeta-\zeta')]^*}{2k} \left(\vec{\kappa} - \frac{k}{[B^C(\zeta-\zeta')]^*} \vec{\sigma} \right)^2} dz' d\zeta' d^2\kappa \end{aligned}$$

og

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle = -2\pi k^2 \iiint \delta(z' - \zeta') \Phi(\vec{\kappa}) \times \\ e^{\frac{ik\gamma_z^M \varrho^2}{2B^C(z-z')} + \frac{ik\gamma_\zeta^M \sigma^2}{2B^C(\zeta-\zeta')} - \frac{i\gamma_z^M B^C(z-z')}{2k} \left(\vec{\kappa} - \frac{k}{B^C(z-z')} \vec{\sigma}\right)^2 - \frac{i\gamma_\zeta^M B^C(\zeta-\zeta')}{2k} \left(\vec{\kappa} + \frac{k}{B^C(\zeta-\zeta')} \vec{\sigma}\right)^2} dz' d\zeta' d^2\kappa.$$

Her kan vi forenkle eksponentene ganske betydelig ved å innse at alle kvadratiske ledd i ϱ og σ kanselleres. I neste trinn kan vi integrere over en av koordinatene i argumentene til deltafunksjonene. Videre, så er vi igjen interessert kun i transversale korrelasjoner i et detektorplan, det vil si, vi setter $z = \zeta$. Det betyr også at vi ikke lenger trenger å skille mellom γ_z^M og γ_ζ^M – dermed kan vi sløyfe den nedre indeksen. Til sammen får vi

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle = 2\pi k^2 \iint \Phi(\vec{\kappa}) e^{i\vec{\kappa}(\gamma^M \vec{\varrho} - [\gamma^M]^* \vec{\sigma}) - \frac{i\kappa^2}{2k} (\gamma^M B^C(z-z') - [\gamma^M B^C(z-z')]^*)} dz' d^2\kappa$$

og

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle = -2\pi k^2 \iint \Phi(\vec{\kappa}) e^{i\vec{\kappa}(\gamma^M \vec{\varrho} - \gamma^M \vec{\sigma}) - \frac{i\gamma^M B^C(z-z')\kappa^2}{k}} dz' d^2\kappa.$$

I et siste trinn forenkler vi uttrykkene en siste gang ved å anta at det stokastiske feltet er isotropt. Vi kan derfor integrere over den asimutale komponenten til $\vec{\kappa}$ og får henholdsvis for de tre forventningsverdiene

$$\langle \varepsilon_2(z) \rangle = -2\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) \kappa d\kappa dz' + \frac{ik}{2} R_\nu(0) \int dz' \\ \langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1^*(\vec{\sigma}, z) \rangle = 4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) J_0 \left(\sqrt{(\gamma^M)^2 \varrho^2 + ([\gamma^M]^*)^2 \sigma^2 - 2|\gamma^M|^2 \vec{\varrho} \vec{\sigma} \cdot \kappa} \right) \times \\ e^{\frac{1}{k} \Im(\gamma^M B^C(z-z')) \kappa^2} \kappa d\kappa dz' \\ \langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1(\vec{\sigma}, z) \rangle = -4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) J_0 \left(\gamma^M |\vec{\varrho} - \vec{\sigma}| \kappa \right) e^{-\frac{i}{k} \gamma^M B^C(z-z') \kappa^2} \kappa d\kappa dz'.$$

For en enkel strekning reduseres disse forventningsverdiene trivielt til resultatene fra kapittel 5.

Integrasjonen over z' i disse uttrykkene skjer langs alle de strekningene mellom (diskrete) optiske elementer der man forventer signifikante bidrag fra turbulent atmosfære. Resultatene til alle bidragene plusses så sammen for å gi totalen til forventningsverdiene. Typisk har man én lang strekning med muligens optiske elementer på hver side, men det kan også oppstå turbulens flere steder innen et forholdsvis lite system med linser. Et system man må være litt forsiktig med er der man reflekterer tilbake laserstrålen samme strekning ved hjelp av et speil. Her er nemlig turbulens på strekningen frem og tilbake fullstendig korrelert med hverandre. Vi skal ikke diskutere en slik situasjon i denne rapporten.

7 Reelle funksjoner

I denne rapporten har vi beskrevet en Gaußstråle ved den komplekse parameteren α , som igjen kan relateres til stråleradius og krumningsradius til fasefronten ved $\alpha = \frac{2}{kW^2} + \frac{i}{F}$. Videre, har vi også diskutert hvordan parameteren α_0 (gitt i kildeplanet) utvikler seg langs en strekning (gitt ved funksjonen $\alpha(z)$, se kapittel 3) eller blir modifisert ved et matrisooptisk system (resultatet gitt ved α^M , se kapittel 6.2). Allikevel er det ofte fordelaktig å bruke to reelle funksjoner som forenkler beskrivelsen av utviklingen og modifiseringen til stråleparameteren. For en strekning er disse to funksjoner gitt ved

$$1 + i\alpha_0 z = \Theta_0(z) + i\Lambda_0(z).$$

Med den definisjonen får vi altså krumningsparameteren

$$\Theta_0(z) = 1 - \frac{z}{F_0}$$

og Fresnelforholdet

$$\Lambda_0(z) = \frac{2z}{kW_0^2},$$

der W_0 og F_0 er henholdsvis stråleradius og krumningsradius til fasefronten ved kildeplanet.

Generelt skiller man mellom

- $F_0 > 0 \leftrightarrow \Theta_0 < 1$: konvergent stråle
- $F_0 < 0 \leftrightarrow \Theta_0 > 1$: divergent stråle
- $F_0 \rightarrow \infty \leftrightarrow \Theta_0 \rightarrow 1$: kollimert stråle.

Generelt, men også spesielt i tilfelle av en kollimert stråle, så har man i tillegg $(\Theta_0 - 1)F_0 \rightarrow -z$, som følger rett fra definisjonen.

Vi fortsetter nå med å beskrive de relevante stråleparameterne gjennom de to nye funksjonene $\Theta_0(z)$ og $\Lambda_0(z)$. Amplituden til en Gaußstråle kan jamført kapittel 3 beskrives ved

$$A(z) = \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z} = \frac{A_0}{\Theta_0(z) + i\Lambda_0(z)} = \frac{A_0 e^{-i\varphi(z)}}{\sqrt{\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z)}}.$$

Her har vi to bidrag der leddet proporsjonalt $\Theta_0^2(z)$ kalles brytningsledd, mens leddet proporsjonalt $\Lambda_0^2(z)$ kalles bøyingsledd. I tillegg får vi en felles faseforskyvning som er gitt ved

$$\varphi(z) = \arctan \frac{\Lambda_0(z)}{\Theta_0(z)}.$$

Den komplekse parameteren $\alpha(z)$ er gitt jamført kapittel 3 ved

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_0}{1 + i\alpha_0 z} = \frac{1}{iz} \frac{\Theta_0(z) - 1 + i\Lambda_0(z)}{\Theta_0(z) + i\Lambda_0(z)},$$

som så kan deles opp i en reell del og en imaginær del relatert til henholdsvis stråleradius og krumningsradius til fasefronten ved det vanlige $\alpha(z) = \frac{2}{kW^2(z)} + \frac{i}{F(z)}$. Hvis man løser opp for disse størrelsene, så får man

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0 \sqrt{\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z)} \\ F(z) &= F_0 \frac{(\Theta_0(z) - 1)(\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z))}{\Theta_0(z)(\Theta_0(z) - 1) + \Lambda_0^2(z)}. \end{aligned}$$

I tilfelle av en kollimert stråle husker vi at $(\Theta_0(z) - 1)F_0 \rightarrow -z$, som betyr at uttrykket for krumningsradien til fasefronten reduseres til

$$F(z) = -z \left(1 + \frac{1}{\Lambda_0^2(z)} \right).$$

Akkurat som amplituden, så får stråleradien to bidrag – et fra brytningsleddet og et fra bøyingsleddet. Interessant er at man kan finne en relasjon mellom stråleradien og krumningsradien til fasefronten. Med litt algebra finner man nemlig lett at

$$\frac{d}{dz} \ln W(z) = -\frac{1}{F(z)},$$

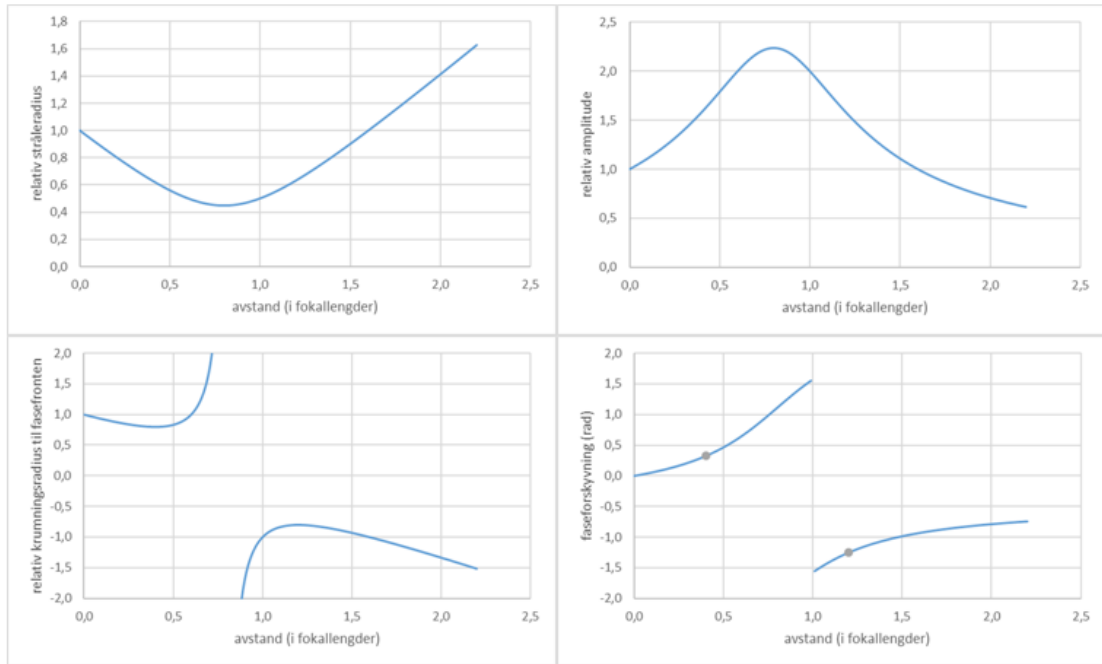
som viser hvordan krumningsradien til fasefronten er relatert til den relative forandringen til stråleradien.

Funksjonene beskriver generelle Gaußstråler, men også spesialtilfellene på samme kompakt og konsistent måte. Typiske spesialtilfeller er

- $\alpha_0 = 0 \leftrightarrow \left(\Theta_0(z) = 1 \wedge \Lambda_0(z) = 0 \right)$: planbølge
- $\alpha_0 = -\frac{i}{L} \leftrightarrow \left(\Theta_0(z) = 1 + \frac{z}{L} \wedge \Lambda_0(z) = 0 \right)$: isotrop punktkilde ved $z = -L$
- $\alpha_0 = \frac{2}{kW_0^2} \leftrightarrow \left(\Theta_0(z) = 1 \wedge \Lambda_0(z) = \frac{2z}{kW_0^2} \right)$: kollimert (radius W_0 i kildeplanet) Gaußstråle.

For å få en følelse av hvordan stråleparameterne til en Gaußstråle utvikler seg med økende avstand fra kildeplanet viser vi forskjellige (relative) størrelser som funksjon av avstand målt i fokallengder, det vil si som funksjon av $\zeta = \frac{z}{F_0}$ for en konvergent stråle. Her er $\Theta_0(z) = 1 - \zeta$ og $\Lambda_0(z) = \Omega_f \zeta$ med den eneste parameteren $\Omega_f = \frac{2F_0}{kW_0^2}$ som kalles fokusparameter. Figur 7.1 viser den relative stråleradien, den relative amplituden, den relative krumningsradien til fasefronten og faseforskyvningen. Figuren gjelder for en konvergent Gaußstråle med en fokusparameter $\Omega_f = 0,5$.

Når man ser på Figur 7.1, så kunne man tro at for å gjøre strålen smalest på et gitt sted (og med en gitt blenderåpning W_0) så burde man legge strålemidjen på det stedet. Men det viser seg at man får minst stråleradius ved en gitt avstand hvis man legger brennpunkt dit isteden. Dette ser man lett hvis man minimerer $W(z)$ som funksjon av F_0 . Et annet interessant tilfelle er hvis man har en kollimert stråle og ønsker å oppnå minst stråleradius ved en gitt avstand L . Ved for stor blenderåpning blir strålen for bred, ved for liten blenderåpning vil bøyningen utvide strålen for mye. Ved å minimere



Figur 7.1 Øvre paneler: relativ stråleradius $\frac{W(z)}{W_0}$ (venstre) og relativ amplitude $\left| \frac{A(z)}{A_0} \right|$ (høyre), nedre paneler: relativ krumningsradius til fasefronten $\frac{F(z)}{F_0}$ (venstre) og faseforskyvning $\varphi(z)$ (høyre), alle som funksjon av avstand målt i fokallengder $\zeta = \frac{z}{F_0}$ for en konvergent Gaußstråle med fokusparameter $\Omega_f = 0,5$. Relativ stråleradius er minst ved $\zeta_W = \frac{1}{1+\Omega_f^2}$ der den har verdien $\frac{\Omega_f}{\sqrt{1+\Omega_f^2}}$, mens ved fokuset er den lik Ω_f . Stedet der strålen er minst kalles også strålemidje. Kurven nærmer seg asymptotisk linjene $\pm\sqrt{1+\Omega_f^2} \left(\zeta - \frac{1}{1+\Omega_f^2} \right)$. Relativ amplitude er størst ved strålemidjen ζ_W der den har verdien $\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega_f^2}}$, mens amplituden ved fokuset er lik $\frac{1}{\Omega_f}$. Kurven har vendepunkter ved $\zeta_v = \frac{1+\Omega_f/\sqrt{2}}{1+\Omega_f^2}$. Relativ krumningsradius til fasefronten blir uendelig, det vil si strålen er kollimert ved strålemidjen ζ_W . Ved fokuset er relativ krumningsradius lik -1 – samme verdi nås igjen ved $2\zeta_W$. Også minimum ved $\left(\frac{1-\Omega_f}{1+\Omega_f^2}; \frac{2\Omega_f}{1+\Omega_f^2} \right)$ og maksimum ved $\left(\frac{1+\Omega_f}{1+\Omega_f^2}; -\frac{2\Omega_f}{1+\Omega_f^2} \right)$ er av teoretisk interesse, siden disse to punktene definerer endepunktene til Rayleighlengden. Kurven nærmer seg asymptotisk linjen $\frac{1}{1+\Omega_f^2} - \zeta$. Faseforskyvningen er lik $\frac{\pi}{2}$ ved fokuset og går mot $-\arctan \Omega_f$ for store avstander. Faseforskyvningen gjennom Rayleighlengden, som er markert ved punktene er også lik $\frac{\pi}{2}$.

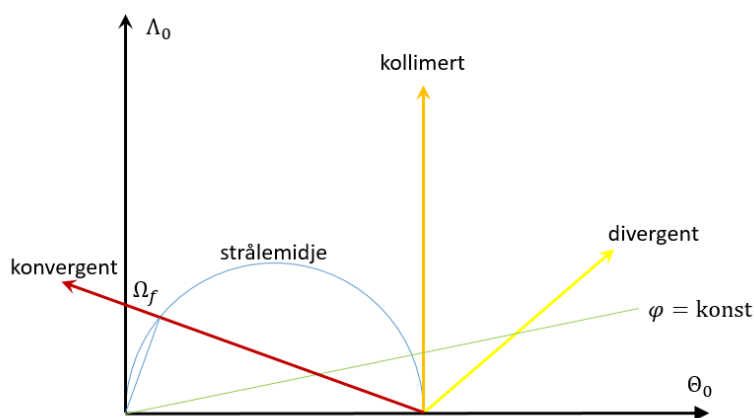
$W(z)$ som funksjon av W_0 finner man lett at optimal blenderåpning er $W_0 = \sqrt{\frac{2L}{k}}$. For en stråle som ikke er kollimert kan resultatet generaliseres til $W_0 = \sqrt{\frac{2L}{k} \left| \frac{F_0}{F_0-L} \right|}$. Ellers kan det være interessant å

maksimere avstand til strålemidjen for en gitt blenderåpning W_0 . Hvis man maksimerer $z_W = F_0 \zeta_W$ som funksjon av F_0 finner man lett at $F_0 = \frac{k}{2} W_0^2$ eller $\Omega_f = 1$. Dette gir $z_W = \frac{F_0}{2}$ og $\Theta_0 = \Lambda_0 = \frac{1}{2}$.

For amplituden gjelder til dels det samme som for stråleradien. For en gitt avstand og blenderåpning oppnår man størst amplitude hvis man fokuserer på ønsket avstand og ikke hvis man legger strålemidjen dit. På den andre siden, så kan man ikke maksimere amplituden til en kollimert stråle på en gitt avstand ved valg av optimal blenderåpning. Amplituden minker nemlig monotont med minkende blenderåpning.

Rayleighlengden er den delen av strålen der stråleradius ikke blir større enn $\sqrt{2}$ ganger minsteradien. Det betyr samtidig at amplituden ikke blir mindre enn $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ganger maksimalamplituden. Samtidig er Rayleighlengden området mellom de lokale ekstremalpunktene til krumningsradien til fasefronten. Faseforskyvningen gjennom hele Rayleighlengden er lik $\frac{\pi}{2}$.

Det er også nyttig å se på en parameterfremstilling. Med $\Theta_0(z) = 1 - \frac{z}{F_0}$ og $\Lambda_0(z) = \Omega_f \frac{z}{F_0}$ kan vi i parameterplanet $(\Theta_0; \Lambda_0)$ fremstille en Gaußstråle som en linje ved $\Lambda_0 = \Omega_f (1 - \Theta_0)$. Figur 7.2 viser eksempler til divergente, kollimerte og konvergente Gaußstråler i et slikt parameterplan.



Figur 7.2 I parameterplanet $(\Theta_0; \Lambda_0)$ starter alle stråler ved $(1; 0)$. Divergente stråler (gul pil) går mot høyre, kollimerte stråler (oransje pil) går rett oppover og konvergente stråler (rød pil) går mot venstre. Den grønne linjen er en linje med konstant faseforskyvning. Faseforskyvningen tilsvarer akkurat vinkelen mellom den grønne linjen og x -aksen. Avstand fra origo er lik $\sqrt{\Theta_0^2 + \Lambda_0^2}$ og dermed lik relativ stråleradius. Avstanden blir minst når linjen fra origo (blå linje) står loddrett på pilens retning. Derfor definerer halvsirkelen steder i parameterplanet som tilsvarer strålemidjer. Geometrisk fokus er gitt ved $\Theta_0 = 0$, derfor er snittpunkt til pilen med y -aksen lik Ω_f , siden det tilsvarer den relative stråleradien ved brennpunkt.

Spesielt nyttig blir fremstillingen i parameterplanet når man ser på Rayleighlengden som vist i Figur 7.3. Her innser man ganske lett at faseforskyvningen mellom endepunktene til Rayleighlengden er lik $\frac{\pi}{2}$. Videre ser man at endepunktene er gitt ved

$$\begin{pmatrix} \Theta_0 \\ \Lambda_0 \end{pmatrix}_W \pm \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ -\Theta_0 \end{pmatrix}_W.$$

Her husker vi at siden $\Theta_0 = 1 - \zeta$, $\Lambda_0 = \Omega_f \zeta$ og $\zeta_W = \frac{1}{1 + \Omega_f^2}$, så får vi som Λ_0 koordinatene til endepunktene til Rayleighlengden $\frac{\Omega_f(1 \pm \Omega_f)}{1 + \Omega_f^2}$ og derfor

$$\zeta_{W \pm R} = \frac{1 \pm \Omega_f}{1 + \Omega_f^2},$$

som indikert i Figur 7.1. Hele Rayleighlengden er derfor gitt ved

$$z_R = 2F_0 \frac{\Omega_f}{1 + \Omega_f^2}.$$

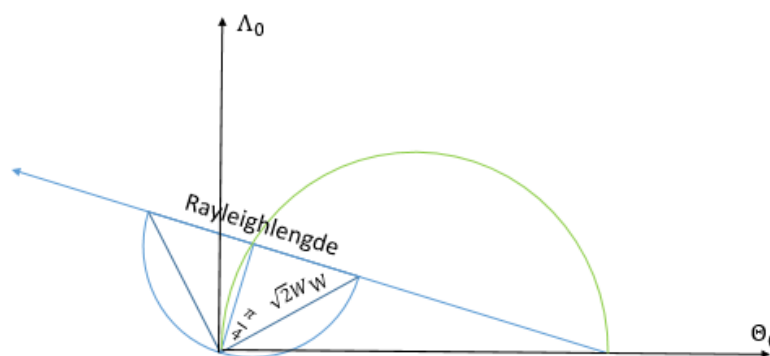
For en svakt konvergent stråle med $\Omega_f > 1$ hadde nærmeste endepunkt til Rayleighlengden blitt negativ. I så fall regner man Rayleighlengden kun fra kildeplanet og man får

$$z_R = F_0 \frac{1 + \Omega_f}{1 + \Omega_f^2},$$

altså avstanden til andre endepunkt. For $F_0 \rightarrow \infty$, det vil si for en kollimert stråle ender man opp med

$$z_R = \frac{kW_0^2}{2}.$$

Rayleighlengden er ikke definert for en divergent stråle.



Figur 7.3 Som i Figur 7.2 er strålemidje gitt ved snittpunkt av grønn halvsirkel med pilen. Snittpunktets avstand fra origo gir relativ stråleradius ved strålemidje W_W . Rayleighlengden er området der stråleradius ikke overstiger $\sqrt{2}W_W$. Endepunktene til Rayleighlengden er derfor gitt ved linjer som former den store blå trekanten. Dens to korte sider former henholdsvis 45° vinkler med høyden i trekanten. Total faseforskyvning fra ende til ende til Rayleighlengden er derfor $\frac{\pi}{2}$ som indikert i Figur 7.1.

7.1 Resiprok konjugerte funksjoner

I tillegg til de reelle funksjonene $\Theta_0(z)$ og $\Lambda_0(z)$ er også de resiprok konjugerte funksjonene $\Theta_1(z)$ og $\Lambda_1(z)$ i bruk. Funksjonene er definert ved

$$\frac{1}{1 + i\alpha_0 z} = \Theta_1(z) - i\Lambda_1(z),$$

som lett forklarer navnet. Sammenhengen med de andre funksjonene er gitt ved

$$\left(\Theta_0(z) + i\Lambda_0(z)\right) \left(\Theta_1(z) - i\Lambda_1(z)\right) = 1,$$

som impliserer følgende rekke med reelle identiteter

$$\begin{aligned} \Theta_1(z) &= \frac{\Theta_0(z)}{\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z)} & \Theta_0(z) &= \frac{\Theta_1(z)}{\Theta_1^2(z) + \Lambda_1^2(z)} \\ \Lambda_1(z) &= \frac{\Lambda_0(z)}{\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z)} & \Lambda_0(z) &= \frac{\Lambda_1(z)}{\Theta_1^2(z) + \Lambda_1^2(z)} \\ \left(\Theta_0^2(z) + \Lambda_0^2(z)\right) &= \left(\Theta_1^2(z) + \Lambda_1^2(z)\right)^{-1} \\ \frac{\Lambda_0(z)}{\Theta_0(z)} &= \frac{\Lambda_1(z)}{\Theta_1(z)}. \end{aligned}$$

Amplituden til en Gaußstråle kan formuleres i de resiprok konjugerte funksjonene som

$$A(z) = \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z} = A_0 \left(\Theta_1(z) - i\Lambda_1(z)\right) = A_0 \sqrt{\Theta_1^2(z) + \Lambda_1^2(z)} e^{-i\varphi(z)},$$

der faseforskyvningen er gitt ved

$$\varphi(z) = \arctan \frac{\Lambda_1(z)}{\Theta_1(z)}.$$

Den komplekse stråleparameteren for en strekning $\alpha(z)$ er gitt ved

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_0}{1 + i\alpha_0 z} = \frac{1}{iz} \left(1 - \Theta_1(z) + i\Lambda_1(z)\right),$$

som kan deles opp i en reell del og en imaginær del relatert til henholdsvis stråleradius og krumningsradius til fasefronten ved det vanlige $\alpha(z) = \frac{2}{kW^2(z)} + \frac{i}{F(z)}$. Hvis man løser opp for disse størrelsene får man

$$\begin{aligned} \Theta_1(z) &= 1 + \frac{1}{F(z)} \\ \Lambda_1(z) &= \frac{2z}{kW^2(z)}. \end{aligned}$$

Hvis man heller vil uttrykke $W(z)$ og $F(z)$ i de resiprok konjugerte funksjonene får man

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{W_0}{\sqrt{\Theta_1^2(z) + \Lambda_1^2(z)}} \\ F(z) &= F_0 \frac{\Theta_1(z) (\Theta_1(z) - 1) + \Lambda_1^2(z)}{(\Theta_1(z) - 1) (\Theta_1^2(z) + \Lambda_1^2(z))}. \end{aligned}$$

I tilfelle av $|F(z)| \rightarrow \infty$ (ved strålemidjen z_W) ser vi at $\Theta_1(z) \rightarrow 1$ og $F(z) (\Theta_1(z) - 1) \rightarrow z_W$, som betyr at uttrykket for krumningsradien til fasefronten reduseres til

$$F_0 = z_W \left(1 + \frac{1}{\Lambda_1^2(z_W)} \right).$$

Generelt skiller vi også her mellom

- $F(z) > 0 \leftrightarrow \Theta_1(z) > 1$: konvergent del av stråle
- $F(z) < 0 \leftrightarrow \Theta_1(z) < 1$: divergent del av stråle
- $|F(z)| \rightarrow \infty \leftrightarrow \Theta_1(z) \rightarrow 1$: stedet der strålen er kollimert.

Legg merke til at mens parameteren F_0 er krumningsradien til fasefronten i kildeplanet, som karakteriserer strålen som helhet, så er $F(z)$ en funksjon og derfor gir krumningsradien til fasefronten som funksjon av z . Som illustrert i Figur 7.1 bytter for eksempel en konvergent stråle etter hvert over til en divergent stråle, mens strålemidjen er stedet der strålen er kollimert. Strålen kalles en konvergent stråle, selv om strålen er divergent bortenfor strålemidjen.

Vi fortsetter med å beskrive noen spesialtilfeller av Gaußstråler med de resiprok konjugerte funksjonene. Spesialtilfellene er

- $\alpha(z) = 0 \leftrightarrow \left(\Theta_1(z) = 1 \wedge \Lambda_1(z) = 0 \right)$: planbølge
- $\alpha(z) = -\frac{i}{z} \leftrightarrow \left(\Theta_1(z) = 0 \wedge \Lambda_1(z) = 0 \right)$: isotrop punktkilde ved $z = 0$
- $\alpha(z) = \frac{2}{kW_0^2 + 2iz} \leftrightarrow \left(\Theta_1(z) = \frac{k^2 W_0^4}{k^2 W_0^4 + 4z^2} \wedge \Lambda_1(z) = \frac{2z kW_0^2}{k^2 W_0^4 + 4z^2} \right)$: kollimert (radius W_0 i kildeplanet) Gaußstråle.

Det er tydelig at en planbølge og særlig en isotrop punktkilde har en veldig kompakt beskrivelse ved de resiprok konjugerte funksjonene, mens en kollimert Gaußstråle får en litt mer komplisert beskrivelse.

Også med de resiprok konjugerte funksjonene kan vi formulere en nyttig parameterfremstilling til en Gaußstråle. For dette tar vi utgangspunkt i parameterfremstillingen til de reelle funksjonene $\Lambda_0 = \Omega_f (1 - \Theta_0)$ og erstatter disse med de resiprok konjugerte funksjonene, slik at vi får

$$\frac{\Lambda_1}{\Theta_1^2 + \Lambda_1^2} = \Omega_f \left(1 - \frac{\Theta_1}{\Theta_1^2 + \Lambda_1^2} \right).$$

Med litt algebra kan man omforme det til sirkellikninger gitt ved

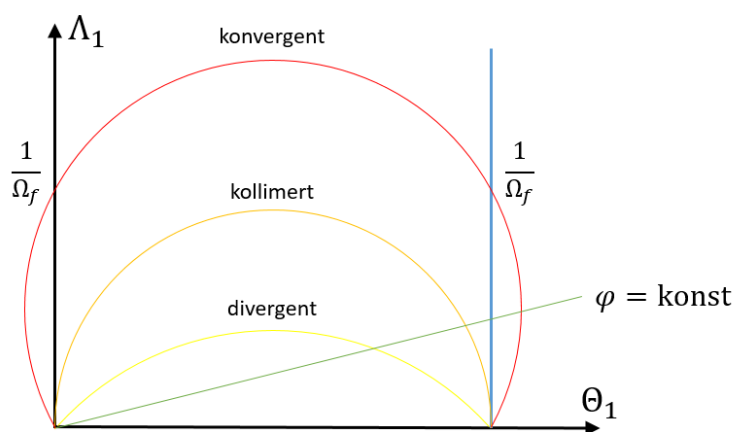
$$\left(\Theta_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\Lambda_1 - \frac{1}{2\Omega_f} \right)^2 = \frac{1 + \Omega_f^2}{4\Omega_f^2},$$

det vil si til sirkler med midtpunkter $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2\Omega_f} \right)$ i parameterplanet $(\Theta_1; \Lambda_1)$ og med radier $R = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\Omega_f^2}}$. Man ser også lett at punktene $(\Theta_1; \Lambda_1) = (1; 0)$ og $(0; 0)$ er fellespunkter for alle slike

sirkler. Disse punktene tilsvarer både vilkårlige Gaußstråler for argumentene $z = 0$ og $z \rightarrow \infty$ og stasjonære punkter til henholdsvis en planbølge og en isotrop punktkilde. Vi har generelt

- $F_0 > 0 \leftrightarrow \Omega_f > 0$: konvergent stråle, midtpunkt over horisontal akse
- $F_0 < 0 \leftrightarrow \Omega_f < 0$: divergent stråle, midtpunkt under horisontal akse
- $|F_0| \rightarrow \infty \leftrightarrow \frac{1}{2\Omega_f} \rightarrow 0$: kollimert stråle, midtpunkt på den horisontale aksens.

Figur 7.4 viser en grafisk fremstilling av divergente, kollimerte og konvergente Gaußstråler i parameterplanet $(\Theta_1; \Lambda_1)$.



Figur 7.4 I parameterplanet $(\Theta_1; \Lambda_1)$ starter alle stråler ved $(1; 0)$ og ender ved $(0; 0)$. Divergente stråler (gul bue) har midtpunkt ved negative Λ_1 , kollimerte stråler (oransje bue) har midtpunkt på x -aksen og konvergente stråler (rød bue) har midtpunkt ved positive Λ_1 . Den grønne linjen er en linje med konstant faseforskyvning. Faseforskyvningen tilsvarer akkurat vinkelen mellom den grønne linjen og x -aksen. Avstand fra origo er lik $\sqrt{\Theta_1^2 + \Lambda_1^2}$ og dermed lik relativ amplitude. For konvergente stråler blir avstanden fra origo størst når linjen fra origo går gjennom midtpunktet til dens sirkel og derfor krysser sirkelbuen loddreidd, det vil si der buen krysser den blå linjen. Derfor definerer den blå linjen steder i parameterplanet som tilsvarer strålemidjer. Relativ amplitude ved strålemidjen er $\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega_f^2}}$ (se Figur 7.1). Geometrisk fokus er gitt ved faseforskyvning $\frac{\pi}{2}$ (se også Figur 7.1) det vil si ved snittpunkt til sirkelbuen med y -aksen, som er ved $\frac{1}{\Omega_f}$, siden det tilsvarer den relative amplituden ved brennpunkt (se igjen Figur 7.1).

En konsekvens av at alle Gaußstråler lar seg beskrive som sirkler i planet til de resiprok konjugerte funksjonene er at ut fra sirkellikningen kan vi formulere et lineært uttrykk for

$$\Theta_1^2 + \Lambda_1^2 = \Theta_1 + \frac{\Lambda_1}{\Omega_f}.$$

Dermed kan så å si alle uttrykkene til de relevante stråleparameterne forenkles og vi får

$$\begin{aligned} |A(z)| &= |A_0| \sqrt{\Theta_1(z) + \frac{\Lambda_1(z)}{\Omega_f}} \\ W(z) &= \frac{W_0}{\sqrt{\Theta_1(z) + \frac{\Lambda_1(z)}{\Omega_f}}} \\ F(z) &= \frac{F_0}{\Theta_1(z) - \Omega_f \Lambda_1(z)} \end{aligned}$$

der spesielt det siste uttrykket fremstår som en stor forenkling.

7.2 Forventningsverdiene

For å kunne dra nytte av de nye funksjonene må disse innlemmes i formalismen som tilsvare Rytovapproximasjonen. For dette ser vi tilbake til forventningsverdiene fra kapittel 5. Disse forventningsverdiene er formulert ved hjelp av parameteren γ , som vi i det følgende ønsker å erstatte med de resiprok konjugerte funksjonene. For dette husker vi fra kapittel 5 at

$$\gamma(z') = \frac{1 + i\alpha_0 z'}{1 + i\alpha_0 z} = 1 - \frac{i\alpha_0 z}{1 + i\alpha_0 z} \left(1 - \frac{z'}{z}\right).$$

Videre har vi fra kapittel 7.1

$$\frac{i\alpha_0 z}{1 + i\alpha_0 z} = 1 - \Theta_1(z) + i\Lambda_1(z).$$

Dermed har vi til sammen

$$\begin{aligned} \gamma(z') &= 1 - \left(1 - \Theta_1(z) + i\Lambda_1(z)\right) \left(1 - \frac{z'}{z}\right) \\ &= \Theta_1(z) - i\Lambda_1(z) + \left(1 - \Theta_1(z) + i\Lambda_1(z)\right) \frac{z'}{z}. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi dele opp γ i en reelldel og en imaginærdel og får

$$\begin{aligned} \Re(\gamma(z')) &= \Theta_1(z) + \left(1 - \Theta_1(z)\right) \frac{z'}{z} \\ \Im(\gamma(z')) &= -\Lambda_1(z) \left(1 - \frac{z'}{z}\right). \end{aligned}$$

Med dette kan vi formulere forventningsverdiene i de resiprok konjugerte funksjonene og får

$$\langle \varepsilon_2(z) \rangle = -2\pi^2 k^2 z \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa + \frac{ikz}{2} R_\nu(0),$$

som er det samme som før, siden det ikke avhenger av noen stråleparametere, samt

$$\langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1^*(\vec{\sigma}, z) \rangle = 4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) e^{-\frac{\Lambda_1(z)}{kz} (z-z')^2 \kappa^2} \times \\ J_0 \left(\sqrt{\Re^2(\gamma(z')) (\vec{\varrho} - \vec{\sigma})^2 - \Im^2(\gamma(z')) (\vec{\varrho} + \vec{\sigma})^2 + 2i\Re(\gamma(z')) \Im(\gamma(z')) (\varrho^2 - \sigma^2) \kappa} \right) \times \\ \kappa d\kappa dz'$$

og

$$\langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1(\vec{\sigma}, z) \rangle = -4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) e^{-\frac{i}{k} (z-z') \kappa^2 - \frac{\Lambda_1(z) - i(1-\Theta_1(z))}{kz} (z-z')^2 \kappa^2} \times \\ J_0 \left(\left[1 - \left(1 - \Theta_1(z) + i\Lambda_1(z) \right) \left(1 - \frac{z'}{z} \right) \right] |\vec{\varrho} - \vec{\sigma}| \kappa \right) \kappa d\kappa dz'.$$

Midlet feltstyrke og korrelasjonsfunksjonene beregnes ut ifra forventningsverdiene som før.

Siden det opptrer en del ganger uttrykket $1 - \Theta_1(z)$ i formlene, har man også definert enda en funksjon $\bar{\Theta}_1(z) = 1 - \Theta_1(z)$ som man noen gang finner i bøker og publikasjoner. Dermed kan formlene skrives enda litt mer kompakt.

7.3 Matriseoptikk

Reelle og resiprok konjugerte funksjoner kan også anvendes i matriseoptikk. Prinsipielt kan man nemlig definere

$$A(z) + i\alpha_0 B(z) = \Theta_0^M(z) + i\Lambda_0^M(z) \\ \frac{1}{A(z) + i\alpha_0 B(z)} = \Theta_1^M(z) - i\Lambda_1^M(z).$$

Med det vanlige $\alpha_0 = \frac{2}{kW_0^2} + \frac{i}{F_0}$ lar seg for eksempel det øvre uttrykket deles opp i en reelldel og en imaginærdel og man får

$$\Theta_0^M(z) = \Re \left(A(z) - \frac{B(z)}{F_0} + i \frac{2B(z)}{kW_0^2} \right) \\ \Lambda_0^M(z) = \Im \left(A(z) - \frac{B(z)}{F_0} + i \frac{2B(z)}{kW_0^2} \right).$$

Videre, siden

$$\alpha^M(z) = \frac{\alpha_0 D(z) - iC(z)}{A(z) + i\alpha_0 B(z)} = \frac{2}{kW^2(z)} + \frac{i}{F(z)},$$

som man kan uttrykke både ved $(\Theta_0^M(z); \Lambda_0^M(z))$ og $(\Theta_1^M(z); \Lambda_1^M(z))$ gjennom

$$\alpha^M(z) = \frac{1}{iB(z)} \left[D(z) - \frac{1}{\Theta_0^M(z) + i\Lambda_0^M(z)} \right] = \frac{1}{iB(z)} \left[D(z) - \Theta_1^M(z) + i\Lambda_1^M(z) \right]$$

finner man enkelt med litt algebra at

$$\begin{aligned}\Theta_1^M(z) &= \Re \left(D(z) + \frac{B(z)}{F(z)} - i \frac{2B(z)}{kW^2(z)} \right) \\ \Lambda_1^M(z) &= -\Im \left(D(z) + \frac{B(z)}{F(z)} - i \frac{2B(z)}{kW^2(z)} \right).\end{aligned}$$

Man ser også at uttrykkene for Θ^M og Λ^M reduseres til de tilsvarende uttrykkene for Θ og Λ i tilfelle av en enkel strekning.

Til tross for at vi kan formulere de to settene med funksjoner på denne måten for et helt optisk system, så viser det seg at denne formuleringen ikke er særlig nyttig. Grunnen er at selv om man nå enkelt kan formulere amplitude⁹ og faseforskyvning på grunn av den enkle sammenhengen

$$\mathcal{A}(z) = \frac{A_0}{A(z) + i\alpha_0 B(z)} = \frac{A_0}{\Theta_0^M(z) + i\Lambda_0^M(z)} = A_0 [\Theta_1^M(z) - i\Lambda_1^M(z)],$$

som gir det vanlige

$$\begin{aligned}\left| \frac{\mathcal{A}(z)}{A_0} \right| &= \frac{1}{\sqrt{(\Theta_0^M(z))^2 + (\Lambda_0^M(z))^2}} = \sqrt{(\Theta_1^M(z))^2 + (\Lambda_1^M(z))^2} \\ -\arg \left(\frac{\mathcal{A}(z)}{A_0} \right) = \varphi(z) &= \arctan \frac{\Lambda_0^M(z)}{\Theta_0^M(z)} = \arctan \frac{\Lambda_1^M(z)}{\Theta_1^M(z)},\end{aligned}$$

så er relasjonen mellom funksjonene Θ^M og Λ^M på den ene siden og stråleradius $W(z)$ og krumningsradius til fasefronten $F(z)$ (eller generelt stråleparameteren $\alpha^M(z)$) på den andre siden blitt mer komplisert enn i tilfelle av en enkel strekning – man mangler nemlig uttrykk for matriseelementene $B(z)$ og $D(z)$. Vi skal derfor velge en alternativ fremgangsmåte.

En typisk situasjon når man beregner forventningsverdier er nemlig at man har én eller flere optiske elementer med enkle strekninger imellom. Mens de diskrete optiske elementene kan forandre stråleradien og krumningsradien til fasefronten, så bidrar de ikke i seg selv til forventningsverdiene. Det er kun de enkle strekningene (gjennom atmosfære) som kan bidra. Ofte tar man ikke en gang hensyn til alle enkle strekninger – korte strekninger mellom to nære optiske elementer som for eksempel en linse og en (variabel) blenderåpning kan stort sett neglisjeres. Derfor er det mest nyttig å dele hele systemet opp i de enkle (lengre) strekningene som bidrar til forventningsverdiene og i diskrete optiske elementer (eller kombinasjoner derav, muligens med korte neglisjerbare strekninger mellom dem). Vi definerer nå sett med reelle funksjoner for hver av de seksjonene. Utgangspunkt er som vanlig en Gaußstråle som er karakterisert i kildeplanet ved en amplitude A_0 og den komplekse stråleparameteren α_0 . Vi vet fra kapittel 6.2 at etter gjennomgang av det første optiske (del-)systemet (med lengde L_1), så har vi fortsatt en Gaußstråle, men med amplitude og kompleks stråleparameter gitt ved

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_I &= \frac{A_0}{A^I + i\alpha_0 B^I} \\ \alpha_1^M &= \frac{\alpha_0 D^I - iC^I}{A^I + i\alpha_0 B^I}.\end{aligned}$$

⁹Som i kapittel 6.2 skriver vi amplitude til et matriseoptisk system igjen som \mathcal{A} for å bedre kunne skille det fra matriseelementet A .

Videre definerer vi for dette delsystemet to sett med reelle funksjoner

$$\begin{aligned} A^I + i\alpha_0 B^I &= \Theta_0^I + i\Lambda_0^I \\ \frac{1}{A^I + i\alpha_0 B^I} &= \Theta_1^I - i\Lambda_1^I. \end{aligned}$$

For neste delsystem gjelder da tilsvarende

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{II} &= \frac{\mathcal{A}_I}{A^{II} + i\alpha_1^M B^{II}} \\ \alpha_{II}^M &= \frac{\alpha_1^M D^{II} - iC^{II}}{A^{II} + i\alpha_1^M B^{II}}, \end{aligned}$$

med

$$\begin{aligned} A^{II} + i\alpha_1^M B^{II} &= \Theta_0^{II} + i\Lambda_0^{II} \\ \frac{1}{A^{II} + i\alpha_1^M B^{II}} &= \Theta_1^{II} - i\Lambda_1^{II}, \end{aligned}$$

og så videre. Dermed er for eksempel amplituden ved slutten av hele det optiske systemet (bestående av n delsystemer) gitt ved

$$\mathcal{A}_n = A_0 \prod_{m=1}^n (\Theta_0^m + i\Lambda_0^m)^{-1} = A_0 \prod_{m=1}^n (\Theta_1^m - i\Lambda_1^m).$$

For α_n^M kan man dessverre ikke formulere en så enkel sammenheng siden man fortsatt mangler uttrykk for matriseelementene B og D .

Dette resultatet i seg selv bidrar altså ikke ennå til mye fremskritt, men det åpner for å undersøke hvordan settene med reelle funksjoner Θ^m og Λ^m ser ut for optiske delsystemer som tilsvarer enkle strekninger, som er jo akkurat de delsystemene som er interessante for oss. I følgende tar vi derfor en enkel strekning med lengde L_m med optiske elementer eller kombinasjoner derav både før (representert i sin helhet ved indeks $m-$) og etter (representert ved $m+$) strekningen. I formalismen til matriseoptikken har vi altså hele systemet delt opp i

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{m+} & B^{m+} \\ C^{m+} & D^{m+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_m - z_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{m-} & B^{m-} \\ C^{m-} & D^{m-} \end{pmatrix},$$

der z_m koordinaten ikke lenger strekker seg fra starten til enden av hele det optiske systemet, men kun fra starten til enden til den enkle strekningen. Vi bruker videre α_0 som stråleparameter i kildeplanet til hele det optiske systemet, α_m^M som stråleparameter i starten av den enkle strekningen og $\alpha_m^M(z_m)$ som stråleparameter gjennom den enkle strekningen.¹⁰ Med disse definisjonene kan vi formulere

$$\alpha_m^M = \frac{\alpha_0 D^{m-} - iC^{m-}}{A^{m-} + i\alpha_0 B^{m-}}$$

¹⁰I det følgende gjelder det også for funksjonene Θ^m og Λ^m , at notasjon uten argument z_m tilsvarer funksjonsverdi ved $z_m = 0$.

jamført kapittel 6.2. Videre kan vi formulere det optiske systemet som

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{m+} & B^{m+} \\ C^{m+} & D^{m+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_m - z_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{m-} + C^{m-} z_m & B^{m-} + D^{m-} z_m \\ C^{m-} & D^{m-} \end{pmatrix},$$

der vi simpelthen har ganget de siste to matrisene med hverandre. Med dette kan vi nå formulere det generelle

$$\alpha_m^M(z_m) = \frac{\alpha_0 D^{m-} - i C^{m-}}{(A^{m-} + C^{m-} z_m) + i \alpha_0 (B^{m-} + D^{m-} z_m)},$$

som reduseres til det forrige uttrykket i tilfelle av $z_m = 0$. Ut av de to uttrykkene kan vi nå eliminere α_0 og løse opp for $\alpha_m^M(z_m)$. Med litt algebra finner vi

$$\alpha_m^M(z_m) = \frac{\alpha_m^M}{1 + i \alpha_m^M z_m}.$$

Dette betyr at en enkel strekning, selv om den befinner seg midt i et komplekst optisk system, fremdeles kan formuleres som en enkel strekning. Det betyr samtidig at de reelle funksjonene $\Theta^m(z_m)$ og $\Lambda^m(z_m)$ som er definert for et delsystem tilsvarende en enkel strekning fungerer akkurat som for en vanlig enkel strekning. Dermed kan alle sammenhenger overføres, inkludert de mellom de reelle funksjonene $\Theta^m(z_m)$ og $\Lambda^m(z_m)$ på den ene siden og stråleparameterne $W(z_m)$ og $F(z_m)$ (eller generelt $\alpha_m^M(z_m)$) på den andre siden.

Vi har nå alt på plass for å kunne formulere forventningsverdiene for et delsystem tilsvarende en enkel strekning. Utgangspunkt er at vi kan formulere $\gamma^M(z') = \frac{A(z') + i \alpha_0 B(z')}{A(z) + i \alpha_0 B(z)}$ som et produkt av delsystemer ved

$$\gamma^M(z_m) = \frac{\prod_{k=1}^{m-1} (\Theta_0^k + i \Lambda_0^k)}{\prod_{k=1}^n (\Theta_0^k + i \Lambda_0^k)} [\Theta_0^m(z_m) + i \Lambda_0^m(z_m)].$$

Her kanselleres alle faktorer med $k < m$. Videre, så erstatter vi alle de gjenværende Θ_0^m og Λ_0^m med de tilsvarende Θ_1^m og Λ_1^m og vi bruker den vanlige z_m avhengigheten for en enkel strekning for funksjonene $\Theta_0^m(z_m)$ og $\Lambda_0^m(z_m)$. Dermed får vi

$$\gamma^M(z_m) = \prod_{k=m}^n (\Theta_1^k - i \Lambda_1^k) (1 + i \alpha_m^M z_m).$$

I neste trinn erstatter vi den komplekse stråleparameteren α_m^M ved hjelp av identiteten $1 + i \alpha_m^M L_m = \Theta_1^m - i \Lambda_1^m$ og får med litt algebra

$$\gamma^M(z_m) = \prod_{k=m+1}^n (\Theta_1^k - i \Lambda_1^k) \left[\frac{z_m}{L_m} + (\Theta_1^m - i \Lambda_1^m) \left(1 - \frac{z_m}{L_m} \right) \right].$$

Som en forenklet skrivemåte innfører vi også

$$\Theta_1^{m+} - i \Lambda_1^{m+} = \prod_{k=m+1}^n (\Theta_1^k - i \Lambda_1^k) = \frac{1}{A^{m+} + i \alpha_{m+1}^M B^{m+}},$$

der vi husker at $\alpha_{m+1}^M = \alpha_m^M(L_m)$, som gir til slutt

$$\gamma^M(z_m) = (\Theta_1^{m+} - i \Lambda_1^{m+}) \left[\frac{z_m}{L_m} + (\Theta_1^m - i \Lambda_1^m) \left(1 - \frac{z_m}{L_m} \right) \right].$$

Man ser lett at denne formelen reduseres til den tilsvarende formelen fra kapittel 7.2 i tilfelle av en eneste enkel strekning.

Det siste som mangler er en formulering av $B^C(z - z')$. For dette ganger vi også de første to matrisene til det optiske systemet og får

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{m+} & A^{m+}[L_m - z_m] + B^{m+} \\ C^{m+} & C^{m+}[L_m - z_m] + D^{m+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{m-} + C^{m-}z_m & B^{m-} + D^{m-}z_m \\ C^{m-} & D^{m-} \end{pmatrix},$$

som lar oss lett identifisere

$$B^C(L_m - z_m) = A^{m+}[L_m - z_m] + B^{m+}.$$

Dette uttrykket lar seg ikke formulere i de reelle funksjonene Θ^m og Λ^m .

Når vi så formulerer forventningsverdiene får vi et bidrag for hver enkel strekning L_m . Vi antar at strekningene er uavhengige fra hverandre med tanke på turbulens. I så fall summeres bidragene fra alle slike strekninger. Hermed utelukker vi eksplisitt situasjonen der en stråle blir sendt tilbake samme vei ved et speil. I så fall hadde nemlig de to strekningene (frem og tilbake) vært fullstendig korrelerte med tanke på turbulens. Under vår antakelse av uavhengighet får vi

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_2(z) \rangle &= \left[-2\pi^2 k^2 \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa + \frac{ik}{2} R_V(0) \right] \sum_m L_m \\ \langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1^*(\vec{\sigma}, z) \rangle &= 4\pi^2 k^2 \sum_m \iint \Phi(\kappa) e^{\frac{1}{k} \Im(\gamma^M(z_m) \{A^{m+}[L_m - z_m] + B^{m+}\}) \kappa^2} \times \\ &\quad J_0 \left(\sqrt{(\gamma^M(z_m))^2 \varrho^2 + ([\gamma^M(z_m)]^*)^2 \sigma^2 - 2|\gamma^M(z_m)|^2 \vec{\varrho} \vec{\sigma} \cdot \kappa} \right) \kappa d\kappa dz_m \\ \langle \varepsilon_1(\vec{\varrho}, z) \varepsilon_1(\vec{\sigma}, z) \rangle &= -4\pi^2 k^2 \sum_m \iint \Phi(\kappa) e^{-\frac{i}{k} \gamma^M(z_m) (A^{m+}[L_m - z_m] + B^{m+}) \kappa^2} \times \\ &\quad J_0 \left(\gamma^M(z_m) |\vec{\varrho} - \vec{\sigma}| \kappa \right) \kappa d\kappa dz_m. \end{aligned}$$

Her går integrasjonen over hver z_m fra 0 til L_m . Dette konkluderer våre diskusjoner av Rytovap-proksimasjonen.

8 Markovapproximasjonen

For Markovapproximasjonen må vi begynne helt forfra igjen. Utgangspunkt er igjen Helmholtzlikningen i den formen som vi har diskutert i kapittel 2. Vi starter altså med

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 (1 + \nu(\mathbf{r}))^2 \mathbf{E} = 0.$$

Som vi har sett i diskusjonen av Rytovapproximasjonen, så gir leddet proporsjonalt $\nu^2(\mathbf{r})$ kun en felles faseforskyvning til midlet feltstyrke (se kapitlene 5 og 6.4). Derfor kan leddet neglisjeres i Rytovapproximasjonen og vi vil også neglisjere leddet i Markovapproximasjonen. Utgangspunktet forenkles altså til

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 (1 + 2\nu(\mathbf{r})) \mathbf{E} = 0.$$

Videre skal vi faktorisere løsningen ved $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{ikz}$. Vi vet fra diskusjonen av Rytovapproximasjonen at den enkle eksponentialfunksjonen overlever i alle ledd til Bornrekken (se kapittel 4) og derfor kanselleres i leddene til den normerte Bornrekken. Uansett tilsvarer eksponentialfunksjonen kun en felles fasefaktor i detektorplanet. Det er derfor naturlig å faktorisere ut denne enkle z -avhengigheten. Det betyr at vi får en differensiallikning for $u(\mathbf{r})$ gitt ved

$$\Delta u(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial}{\partial z} u(\mathbf{r}) + 2k^2 \nu(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0.$$

For den iterative løsningen i Rytovapproximasjonen bruker man som utgangspunkt eller nulte iterasjon en paraksial stråle (se kapittel 3). I Markovapproximasjonen kommer vi ikke til å bruke noe form for iterasjon. For å allikevel ha en paraksial approximasjon neglisjerer vi derfor leddet $\frac{\partial^2}{\partial z^2} u(\mathbf{r})$, slik at differensiallikningen forenkles enda mer til

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\mathbf{r}) + 2k^2 \nu(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0.$$

Det er nemlig slikt at for eksempel en Gaußstråle oppfyller

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \rho^2} = 0,$$

som betyr at hvis man ikke hadde noe fluktuasjoner til brytningsindeksen, altså hvis man hadde $\nu(\mathbf{r}) = 0$, så hadde en mulig løsning vært en Gaußstråle med

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z} e^{-\frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \rho^2}$$

og

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r})e^{ikz} = \frac{A_0}{1 + i\alpha_0 z} e^{ikz - \frac{1}{1+i\alpha_0 z} \frac{\alpha_0}{2} k \rho^2}.$$

Dette tilsvarer akkurat nulte iterasjon i Rytovapproximasjonen jamført kapittel 3.

8.1 Midlet feltstyrke

Frem til nå har vi egentlig ikke gjort noe prinsipielt annerledes enn i Rytovapproximasjonen. Vi har gjort akkurat de samme approximasjoner, bare begrunnet på en annen måte (stort sett ved å henvise til resultater fra Rytovapproximasjonen) og introdusert i en litt annen rekkefølge. Selv den paraksiale approximasjonen til Greensfunksjonen som vi har introdusert i kapittel 3 kunne likegodt utledes som Greensfunksjonen til den paraksiale differensiallikningen

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\mathbf{r}) = 0.$$

Den store forskjellen til Rytovapproximasjonen kommer først i måten vi beregner forventningsverdier. Mens i Rytovapproximasjonen løser vi differensiallikningen først ved å bygge opp de observerbare størrelsene ledd for ledd i en rekkeutvikling for så å beregne forventningsverdiene ut ifra disse, så skal vi i Markovapproximasjonen først danne forventningsverdier til alle ledd i den partielle differensiallikningen for den sakte varierende delen av feltstyrken $u(\mathbf{r})$ og dermed utlede en differensiallikning for forventningsverdiene, som vi så skal løse.

Vi begynner med diskusjonen av midlet feltstyrke. Her tar vi differensiallikningen og erstatter de stedsavhengige funksjonene direkte med dens forventningsverdier. Vi får altså

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle + 2k^2 \langle v(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Her ser vi også med en gang problemet denne metoden byr på. Vi har nemlig til nå ikke noen metode for å beregne forventningsverdien $\langle v(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) \rangle$. Åpenbart er $u(\mathbf{r})$ avhengig av $v(\mathbf{r})$ slik at man ikke bare kan erstatte uttrykket med produktet til de separate forventningsverdiene. Men akkurat denne avhengigheten kan vi utnytte for å gjøre fremskritt. Vi kan nemlig anvende Novikov-Furutsuteoremet formulert for et gaussisk stokastisk felt $v(\mathbf{r})$ og en funksjon som er avhengig av et slikt felt (se vedlegg D). Slik kan vi erstatte $\langle v(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) \rangle$ og får

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle + 2k^2 \int R_v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta u}{\delta v(\mathbf{r}')} \right\rangle d^3 r' = 0.$$

Forutsetningen for å kunne bruke dette teoremet er altså en del strengere enn forutsetningen for å kunne bruke Wiener-Khinchinteoremet under utledningen til Rytovapproximasjonen. For at Novikov-Furutsuteoremet skal gjelde i denne her formen må nemlig det stokastiske feltet være normalfordelt med forsvinnende middelvei, altså $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -fordelt, mens forutsetningen for Wiener-Khinchinteoremet er kun et homogent stokastisk felt (vi ønsker i tillegg at spektralfunksjonen er absolutt kontinuerlig slik at Stieltjesintegralet kan reformuleres som et Riemannintegral og dermed som en enkel Fouriertransformasjon, se kapittel 5). Forutsetningen for bruk av Novikov-Furutsuteoremet betinger altså forutsetningene for å kunne formulere korrelasjonsfunksjonen som en Fouriertransformasjon, og dermed har vi

$$R_v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 2\pi\delta(z - \zeta) \int e^{i\vec{\kappa}(\vec{\rho} - \vec{\sigma})} \Phi(\vec{\kappa}) d^2\kappa,$$

der vi bruker akkurat samme notasjon som i kapittel 5. Spesielt har vi $\mathbf{r} = (\vec{\rho}, z)$, $\mathbf{r}' = (\vec{\sigma}, \zeta)$ og vi har igjen gjort antakelsen at spektralfunksjonen $\Phi(\kappa)$ er uavhengig av κ_z komponenten. Vi innfører

nå en forkortet skrivemåte med

$$A_\nu(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) = 2\pi \int e^{i\vec{k}(\vec{\varrho} - \vec{\sigma})} \Phi(\vec{k}) d^2\kappa,$$

som gjør at vi kan formulere

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle + 2k^2 \iint A_\nu(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) \delta(z - \zeta) \left\langle \frac{\delta u}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} \right\rangle d^2\sigma d\zeta = 0.$$

Når man integrerer over ζ må man passe på at grensene for integrasjonen er fra 0 til z , som betyr at deltafunksjonen bidrar kun med halvparten, akkurat som i beregningen av forventningsverdiene i kapittel 5. Dermed får man

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle + k^2 \int A_\nu(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) \left\langle \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} \right\rangle d^2\sigma = 0.$$

For å beregne den variasjonsderiverte $\frac{\delta u}{\delta v}$ må vi nå først konstruere et egnet funksjonal. Vi begynner med å integrere differensiallikningen for u fra 0 til z , som gir

$$2ik [u(\vec{\varrho}, z) - u(\vec{\varrho}, 0)] + \int \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2k^2 v(\vec{\varrho}, z') \right] u(\vec{\varrho}, z') dz' = 0.$$

Den variasjonsderiverte til dette funksjonale med tanke på $v(\vec{\sigma}, \zeta)$ kan beregnes ved produktregelen og man får

$$2ik \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} + \int \left\{ 2k^2 \frac{\delta v(\vec{\varrho}, z')}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} u(\vec{\varrho}, z') + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2k^2 v(\vec{\varrho}, z') \right] \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z')}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} \right\} dz' = 0.$$

Siden $\frac{\delta v(\vec{\varrho}, z')}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} = \delta(\vec{\varrho} - \vec{\sigma})\delta(z' - \zeta)$, kan den første delen av integralet evalueres lett og man får

$$2ik \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} + 2k^2 \delta(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) u(\vec{\varrho}, \zeta) + \int \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2k^2 v(\vec{\varrho}, z') \right] \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z')}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} dz' = 0.$$

Videre skal vi sette $\zeta = z$, siden vi kun er interessert i den variasjonsderiverte ved det spesielle punktet. Vi får dermed

$$2ik \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} + 2k^2 \delta(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) u(\vec{\varrho}, z) + \int \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2k^2 v(\vec{\varrho}, z') \right] \frac{\delta u(\vec{\varrho}, z')}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} dz' = 0.$$

Her er det viktig å realisere at siden man integrerer over z' fra 0 til z , så kan $u(\vec{\varrho}, z')$ ikke avhenge av $v(\vec{\sigma}, z)$, som betyr at den variasjonsderiverte i integralet er lik null og hele likningen forenkles til

$$\frac{\delta u(\vec{\varrho}, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} = ik \delta(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) u(\vec{\varrho}, z).$$

Siden vi nå har funnet et uttrykk for den variasjonsderiverte, kan vi fortsette med å beregne forventningsverdien. Her får vi nå

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle + k^2 \int A_\nu(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) \langle ik \delta(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) u(\vec{\varrho}, z) \rangle d^2\sigma = 0.$$

Vi kan nå enkelt evaluere integralet og får en differensiallikning for forventningsverdien

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \langle u(\mathbf{r}) \rangle + ik^3 A_v(0) \langle u(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Ved å løse denne differensiallikningen med randbetingelsen $\langle u(\vec{\varrho}, 0) \rangle = u(\vec{\varrho}, 0)$ kan vi finne midlet feltstyrke i detektorplanet.

Vi prøver nå å løse differensiallikningen med løsningen vi fant med Rytovapprosimasjonen, som er gitt ved

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = u_0(\mathbf{r}) e^{M_1(z)},$$

jamført kapittel 5. Hvis vi også for Markovapprosimasjonen antar et isotropt stokastisk felt, altså

$$A_v(0) = 4\pi^2 \int \Phi(\kappa) \kappa d\kappa = -\frac{2}{k^2 z} M_1(z),$$

så kan denne løsningen skrives som

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = u_0(\mathbf{r}) e^{-\frac{1}{2} k^2 z A_v(0)}.$$

Når vi setter denne løsningen inn i differensiallikning for $\langle u(\mathbf{r}) \rangle$ så får vi en differensiallikning for $u_0(\mathbf{r})$ som er gitt ved

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u_0(\mathbf{r}) = 0,$$

og som vi allerede vet har en Gaußstråle som en mulig løsning. Dermed har vi vist at løsningen for midlet feltstyrke i Rytovapprosimasjonen er lik løsningen for midlet feltstyrke i Markovapprosimasjonen for en Gaußstråle. Denne løsningen, for et isotropt stokastisk felt er altså gitt ved

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{M_1(z)},$$

med moment $M_1(z)$ jamført kapittel 5.

8.2 Andregrads korrelasjonsfunksjon

Andregrads korrelasjonsfunksjon er definert ved

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) \rangle$$

jamført kapittel 2.1. Siden man stort sett er interessert i dens verdi i detektorplanet, forenkles dette gjerne til

$$\Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) = \langle u(\vec{\varrho}_1, z) u^*(\vec{\varrho}_2, z) \rangle.$$

For å beregne denne forventningsverdien tar man igjen utgangspunkt i differensiallikningen til $u(\mathbf{r}) = u(\vec{\varrho}_1, z)$ og ganger den med $u^*(\vec{\varrho}_2, z)$, som gir

$$u^*(\vec{\varrho}_2, z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u(\vec{\varrho}_1, z) + 2k^2 v(\vec{\varrho}_1, z) u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z) = 0.$$

Ved å bytte $\vec{\varrho}_1 \leftrightarrow \vec{\varrho}_2$ og ved å ta den kompleks konjugerte likningen kan vi i tillegg få

$$u(\vec{\varrho}_1, z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u^*(\vec{\varrho}_2, z) + 2k^2 v(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z) u^*(\vec{\varrho}_2, z) = 0.$$

Når vi trekker disse to differensiallikningene fra hverandre får vi

$$u^*(\vec{\varrho}_2, z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right] u(\vec{\varrho}_1, z) - u(\vec{\varrho}_1, z) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] u^*(\vec{\varrho}_2, z) \\ + 2ik \frac{\partial}{\partial z} [u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z)] + 2k^2 [v(\vec{\varrho}_1, z) - v(\vec{\varrho}_2, z)] u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z) = 0.$$

Akkurat som i tilfelle av midlet feltstyrke, tar vi nå forventningsverdiene direkte til alle ledd i denne differensiallikningen. Dermed får vi

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) \\ + 2k^2 \langle [v(\vec{\varrho}_1, z) - v(\vec{\varrho}_2, z)] u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z) \rangle = 0$$

og akkurat som før sitter vi igjen med en forventningsverdi (egentlig to forventningsverdier) til en funksjon (egentlig et produkt av to funksjoner) av det stokastiske feltet $v(\mathbf{r})$. Vi anvender derfor igjen Novikov-Furutsuteoremet (se vedlegg D) på de to forventningsverdiene og får

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) \\ + 2k^2 \iint [R_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\sigma}, z - \zeta) - R_v(\vec{\varrho}_2 - \vec{\sigma}, z - \zeta)] \left\langle \frac{\delta [u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z)]}{\delta v(\vec{\sigma}, \zeta)} \right\rangle d^2 \sigma d\zeta = 0.$$

Akkurat som i kapittel 8.1 utnytter vi at $R_v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = A_v(\vec{\varrho} - \vec{\sigma}) \delta(z - \zeta)$ og integrerer over ζ med grensene fra 0 til z (mens vi fremdeles husker at deltafunksjonen kun bidrar med halvparten), slikt at vi får

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) \\ + k^2 \int [A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\sigma}) - A_v(\vec{\varrho}_2 - \vec{\sigma})] \left\langle \frac{\delta [u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z)]}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} \right\rangle d^2 \sigma = 0.$$

Når vi anvender produktregelen på den variasjonsderiverte får vi

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) \\ + k^2 \int [A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\sigma}) - A_v(\vec{\varrho}_2 - \vec{\sigma})] \left\langle \frac{\delta u^*(\vec{\varrho}_2, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} u(\vec{\varrho}_1, z) + u^*(\vec{\varrho}_2, z) \frac{\delta u(\vec{\varrho}_1, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} \right\rangle d^2 \sigma = 0.$$

Med resultatet $\frac{\delta u(\vec{\varrho}, z)}{\delta v(\vec{\sigma}, z)} = ik\delta(\vec{\varrho} - \vec{\sigma})u(\vec{\varrho}, z)$ fra kapittel 8.1 (og dens kompleks konjugerte) får vi

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) - ik^3 \int [A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\sigma}) - A_v(\vec{\varrho}_2 - \vec{\sigma})] \langle [\delta(\vec{\varrho}_2 - \vec{\sigma}) - \delta(\vec{\varrho}_1 - \vec{\sigma})] u^*(\vec{\varrho}_2, z) u(\vec{\varrho}_1, z) \rangle d^2\sigma = 0,$$

som vi lett kan integrere over σ for å få

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) - ik^3 [A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2) - A_v(0) - A_v(0) + A_v(\vec{\varrho}_2 - \vec{\varrho}_1)] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) = 0.$$

Her kan vi utnytte at $A_v(\vec{\varrho})$ er en symmetrisk funksjon og dermed kan vi forenkle hele uttrykket til en differensiallikning til andregrads korrelasjonsfunksjonen

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} + 2ik^3 (A_v(0) - A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2)) \right] \Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) = 0.$$

Ved å løse denne differensiallikningen med randbetingelsen $\Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, 0) = u^*(\vec{\varrho}_2, 0)u(\vec{\varrho}_1, 0)$ kan vi finne andregrads korrelasjonsfunksjon i detektorplanet.

Vi prøver nå igjen å løse denne differensiallikningen med løsningen vi fant med Rytovapprosimasjonen som er gitt ved

$$\Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) = u_0^*(\vec{\varrho}_2, 0)u_0(\vec{\varrho}_1, 0)e^{2M_1(z)+M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z)}$$

jamført kapittel 5. Vi antar igjen et isotropt stokastisk felt, altså

$$\begin{aligned} A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2) &= 2\pi \iint e^{i\kappa|\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2| \cos \vartheta_\kappa} \Phi(\kappa) \kappa d\vartheta_\kappa d\kappa \\ &= 4\pi^2 \int J_0(|\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2|\kappa) \Phi(\kappa) \kappa d\kappa. \end{aligned}$$

Problemet vi støter på umiddelbart er at forventningsverdien $M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z)$ til Rytovapprosimasjonen ikke lar seg relatere til $A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2)$ på liknende måte som man kunne relatere $M_1(z)$ til $A_v(0)$. Det betyr i praksis at løsningen til Rytovapprosimasjonen ikke sammenfaller med løsningen til Markovapprosimasjonen for en generell andregrads korrelasjonsfunksjon. Vi kan derimot finne noen spesialtilfeller der løsningene er identiske. Et slikt eksempel er en planbølge. Hvis vi tar definisjonen til $M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z)$ fra kapittel 5 og beregner dens verdi for en planbølge, det vil si med $\alpha_0 = 0$ og dermed $\gamma = \gamma^* = 1$, så får vi

$$\begin{aligned} M_2(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) &= 4\pi^2 k^2 \iint \Phi(\kappa) J_0(|\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2|\kappa) \kappa d\kappa dz' \\ &= 4\pi^2 k^2 z \int \Phi(\kappa) J_0(|\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2|\kappa) \kappa d\kappa \\ &= k^2 z A_v(\vec{\varrho}_1 - \vec{\varrho}_2). \end{aligned}$$

Dermed og med $M_1(z) = -\frac{1}{2}k^2zA_v(0)$ fra kapittel 8.1 kan løsningen til Rytovapprosimasjonen for en planbølge skrives som

$$\Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z) = u_0^*(\vec{\varrho}_2, z)u_0(\vec{\varrho}_1, z)e^{-k^2z[A_v(0)-A_v(\vec{\varrho}_1-\vec{\varrho}_2)]}.$$

Hvis vi setter dette inn i differensiallikningen for $\Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, z)$, så får vi etter separasjon av variablene en partiell differensiallikning for $u_0(\vec{\varrho}_1, z)$ gitt ved

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + 2k^2z \left(\frac{\partial A_v}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial A_v}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] u_0(\vec{\varrho}_1, z) = C u_0(\vec{\varrho}_1, z),$$

og en tilsvarende kompleks konjugert differensiallikning for $u_0^*(\vec{\varrho}_2, z)$. En planbølge, som er gitt ved $u_0(\vec{\varrho}_1, z) = A_0$ løser for $C = 0$ denne differensiallikningen trivielt og gir passende randbetingelse $\Gamma(\vec{\varrho}_1, \vec{\varrho}_2, 0) = |A_0|^2$. Dermed har vi vist at løsningen for andregrads korrelasjonsfunksjonen til en planbølge i Rytovapprosimasjonen er identisk med den i Markovapprosimasjonen.

8.3 Fjerdegrads korrelasjonsfunksjon

Her har man ikke blitt enig om hvordan en god fjerdegrads korrelasjonsfunksjon kan beregnes innenfor Markovapprosimasjonen. Det er et aktivt forskningsområde som vi håper at vi kan komme tilbake til i en senere rapport der vi kan diskutere forskjellige tilnærmelser. Dette kommer til å ta oss i så fall mye nærmere forskningsfronten enn alt som er diskutert i denne her rapporten. For å gjøre relevante bidrag vil det også være viktig å sammenlikne forskjellige tilnærmelser med eksperimentelle verdier. Det kan derfor være interessant å bygge opp kompetanse i eksperimentelle målinger av laserstråling gjennom turbulent atmosfære. Spesielt kan det være nyttig å få erfaring fra norske forhold, altså med geografien og været gjennom året som er typisk for Norge og som det ikke nødvendigvis finnes så mange datapunkter for.

9 Konklusjon og fremtidsutsikt

Vi har i denne rapporten undersøkt optisk turbulens. Helt konkret har vi undersøkt propagasjon av en monokromatisk gaussisk stråle (typisk en laserstråle) gjennom turbulent atmosfære. Problemet er typisk gitt ved Helmholtzlikningen med et inhomogent ledd tilsvarende et stokastisk felt, som modellerer brytningsindeksfluktuasjoner. Vi har diskutert to mulige løsninger til problemet, Rytov- og Markovapproximasjonen. I begge tilfeller forenkler man i utgangspunktet Helmholtzlikningen til en paraksial likning. I Rytovapproximasjonen løses så differensiallikningen ved en perturbativ rekkeutvikling, der man til slutt tar forventningsverdien til den tilnærmete løsningen (rekkeutviklingen). Formalismen vi har brukt, avhenger av at spektralfunksjonen til det stokastiske feltet er absolutt konvergent, som betyr at den kan beskrives som en Fouriertransformasjon til korrelasjonsfunksjonen. I Markovapproximasjonen tar man først forventningsverdien til alle ledd i den paraksiale likningen for å kunne formulere differensiallikninger til forventningsverdiene, som man så skal løse. Denne metoden er kun mulig hvis det stokastiske feltet er et gaussisk felt. Første forventningsverdi vi beregner er midlet feltstyrke, som viser seg å gi identisk resultat for begge metoder. Neste forventningsverdi er andregrads korrelasjonsfunksjon. Her får vi avvikende resultater med unntak av løsningen for en planbølge der resultatene er igjen sammenfallende. Enda en forventningsverdi er fjerdegrads korrelasjonsfunksjon som kun kan beregnes i Rytovapproximasjonen. Her kan vi derfor ikke sammenlikne resultatene.

En god del av rapporten handler om hvordan Rytovapproximasjonen kan brukes for å beskrive optisk turbulens i systemer der de enkelte elementene kan modelleres ved matriser. Videre har vi brukt en god del plass for å formulere resultatene ved hjelp av reelle parametere og funksjoner.

I del II av rapportserien kommer vi til å diskutere forskjellige atmosfæriske modeller for optisk turbulens. Dermed vil det være mulig å kunne beregne forventningsverdier for helt konkrete optiske systemer. Disse forventningsverdiene og deriverte størrelser kan så sammenliknes med resultater fra simuleringer og eksperimenter. Dette kommer altså til å beskjeftige oss en god stund framover.

A Tredje ordens ledd til Rytovapproximasjonen

Det er faktisk ikke så vanskelig å formulere tredje ordens ledd til Rytovapproximasjonen der man tar med både neste element i Bornrekka, men også bruker momenter og kumulanter opptil tredje orden. For dette trenger vi kun fire til forventningsverdier

$$\begin{aligned} M_4(\mathbf{r}) &= \langle \varepsilon_3(\mathbf{r}) \rangle \\ M_5(\mathbf{r}, \mathbf{s}) &= \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \rangle \\ M_6(\mathbf{r}, \mathbf{s}) &= \langle \varepsilon_2(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{s}) \rangle \\ M_7(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) &= \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1^*(\mathbf{s}) \varepsilon_1(\mathbf{t}) \rangle, \end{aligned}$$

så kan vi formulere midlet feltstyrke

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{M_1(\mathbf{r}) + M_4(\mathbf{r})}$$

og korrelasjonsfunksjonene

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_2) e^{M_1(\mathbf{r}_1) + M_4(\mathbf{r}_1) + M_1^*(\mathbf{r}_2) + M_4^*(\mathbf{r}_2) + M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + M_5(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + M_5^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)}$$

og

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &\approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_2) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_3) \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}_4) e^{M_1(\mathbf{r}_1) + M_1^*(\mathbf{r}_2) + M_1(\mathbf{r}_3) + M_1^*(\mathbf{r}_4)} \times \\ &e^{M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + M_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) + M_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + M_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + M_3^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + M_4(\mathbf{r}_1) + M_4^*(\mathbf{r}_2) + M_4(\mathbf{r}_3) + M_4^*(\mathbf{r}_4)} \times \\ &e^{M_5(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + M_5^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) + M_5(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + M_5^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_1) + M_5(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2) + M_5^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + M_5(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + M_5^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3)} \times \\ &e^{M_6(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + M_6(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + M_6^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + M_6^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) + M_7(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + M_7^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) + M_7(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3) + M_7^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)}. \end{aligned}$$

Problemet er nemlig ikke at rekkeutviklingen blir altfor komplisert, men at når man faktisk skal beregne disse fire nye forventningsverdiene, så trenger man korrelasjonsfunksjoner av typen

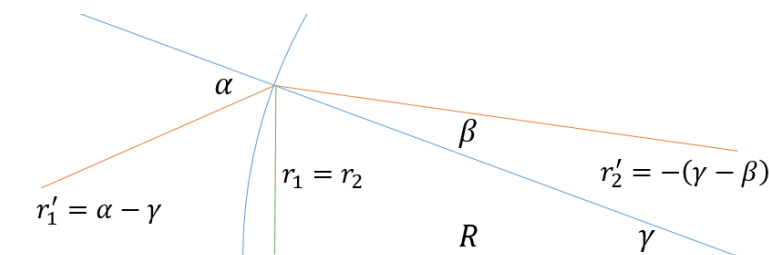
$$\langle \nu(\mathbf{r}) \nu(\mathbf{s}) \nu(\mathbf{t}) \rangle.$$

Her må man huske at den vanlige korrelasjonsfunksjonen $\langle \nu(\mathbf{r}) \nu(\mathbf{s}) \rangle$ kan uttrykkes ved hjelp av Wiener-Khinchinteoremet, det samme gjelder ikke for den generelle tredoble korrelasjonsfunksjonen. Hvis man derimot velger å betrakte et stokastisk felt med en gitt fordelingsfunksjon (for eksempel et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -fordelt felt, som i tilfelle Markovapproximasjonen) så kan man selvfølgelig utlede den tredoble korrelasjonsfunksjonen for denne helt konkrete fordelingsfunksjonen. Spesielt for et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -fordelt felt blir resultatet lik null og man trenger faktisk å gå til fjerde ordens ledd i Rytovapproximasjonen for å finne første ikke-forsvinnende ledd. Det attraktive med et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -fordelt stokastisk felt er at alle høyere ordens korrelasjonsfunksjoner er lik null for oddetalls ordener, mens for like talls ordener kan de reduseres til produkter av vanlige korrelasjonsfunksjoner. Dermed kan det være en mulighet å se på fjerde ordens Rytovapproximasjonen i fremtiden.

B Eksempler til enkle optiske matriser

B.1 Grenseflate med krumning

Et av de mest fundamentale elementene i matriseoptikken er matrisen tilsvarende refraksjon ved en grenseflate med krumning (se Figur B.1).



Figur B.1 Refraksjon ved en grenseflate med krumning. Innkommende stråle (oransje) med stigning r'_1 i forhold til den optiske aksen (svart linje) treffer på grenseflaten (blå kurve) med vinkel α og blir brutt til en vinkel β som gir en tilsvarende stigning r'_2 relativ til den optiske aksen. Grenseflaten har en krumningsradius R og refraksjon skjer ved en avstand (grønn linje) $r_1 = r_2 = R \sin \gamma \approx R\gamma$ fra den optiske aksen.

Vi kan approksimere Snells lov $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ ved det enklere $n_1 \alpha \approx n_2 \beta$ og kan dermed relatere de to stigningstallene med hverandre ved for eksempel $r'_1 - r'_2 = \alpha - \beta = \alpha \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$. Her kan vi nå eliminere vinkelen α ved $\alpha = r'_1 + \gamma = r'_1 + \frac{r_1}{R}$ og får dermed til sammen

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}.$$

B.2 Tynn linse

For en tynn linse, så må vi anvende formelen for en grenseflate med krumning to ganger etter hverandre. Her må man passe på at i det første tilfellet, så skjer overgangen fra et medium med brytningsindeks n_1 til et annet medium med brytningsindeks n_2 , mens i det andre tilfellet så skjer overgangen fra mediet med n_2 tilbake til mediet med n_1 . Videre, så definerer vi positiv krumningsradius for en konveks overflate til mediet med n_2 , det vil si at i matrisen for den andre grenseflaten må vi bytte fortegn til krumningsradien. Til sammen får vi altså

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

som vi kan forenkle til

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}.$$

Her har vi brukt (under antakelsen $n_1 = n_{\text{luft}} \approx 1$) definisjonen til lensens brennvidde f ved

$$\frac{1}{f} = (n_{\text{glass}} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

som også er kjent som linseslikerlikningen.

B.3 Hulspeil

Ved et hulspeil, det vil si en reflekterende overflate med krumningsradius R , så entrer en stråle med stigning r'_1 ved en avstand r_1 fra den optiske akse med en vinkel $r'_1 - \frac{r_1}{R}$ til normalretningen. Det betyr at stigningen til den reflekterte strålen blir $-r'_2 = r'_1 - 2 \left(r'_1 - \frac{r_1}{R} \right)$, altså den opprinnelige stigningen minus to ganger differansen til normalretningen. Her får r'_2 et ekstra minustegn, siden stråleretningen blir jo snudd. Avstanden til den reflekterte strålen fra den optiske akse er selvsagt som før, det vil si vi har $r_2 = r_1$ akkurat som i tilfelle av en tynn linse, og dermed har vi til sammen

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan man også si at et hulspeil har en brennvidde tilsvarende $f = \frac{R}{2}$, altså halve krumningsradien.

B.4 Blenderåpning

I en blenderåpning blir strålen kuttet av ved en gitt radius (vi antar her sirkulære blenderåpninger). Ofte er det enklere å tenke seg en Gauß-blenderåpning som ikke kutter av strålen, men som modulerer amplituden i radiell retning med en faktor $e^{-\frac{r^2}{W^2}}$, der W tilsvarer radien til blenderåpningen. Med denne approksimasjonen kan vi nå konstruere en optisk matrise til en blenderåpning. Spesielt ser vi tilbake til Figur 3.1. Hvis vi hypotetisk kunne introdusere en faseforskyvning proporsjonelt $\Delta\varphi = -\frac{kr^2}{2F_0}$ til for eksempel en planbølge (som har en stigning $r'_1 = 0$), så hadde vi konstruert en divergent bølge med stigning $r'_2 = -\frac{r}{F_0}$. Hvis strålen hadde en stigning r'_1 fra før, så hadde den stigningen kommet i tillegg. Nå introduserer en Gauß-blenderåpning ikke en (reell) faseforskyvning, men en amplitudemodulasjon, som vi igjen kan tolke som en imaginær faseforskyvning ved

$$i\Delta\varphi = -\frac{r^2}{W^2},$$

som altså gir et imaginært bidrag til stigningen i form av $\Delta r' = \frac{2i}{kW^2}r$. Dermed kan vi formulere den optiske matrisen til en Gauß-blenderåpning som

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2i}{kW^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}.$$

B.5 Gaußlinse

En Gaußlinse er en kombinasjon av en tynn linse og en Gauß-blenderåpning som igjen modellerer størrelsen til linsen (eller til en faktisk blenderåpning). Den optiske matrisen til en Gaußlinse er multiplikasjonen til de to enkelte optiske matrisene. Matrisene kommuterer med hverandre, som også betyr at innenfor approksimasjonen med optiske matriser, så spiller det ingen rolle i hvilken rekkefølge en linse og en blenderåpning blir montert (så lenge avstanden mellom dem er liten nok at den kan neglisjeres). Selve matrisen er gitt ved

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} + \frac{2i}{kW^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}.$$

Ofte, så legger man de to bidragene sammen til $\alpha_G = \frac{2}{kW^2} + \frac{i}{f}$, der den komplekse parameteren α_G karakteriserer altså Gaußlinsen. På lignende måte kan man formulere et Gauß-hulspeil med parameteren $\alpha_H = \frac{2}{kW^2} + \frac{2i}{R}$. De tilsvarende optiske matrisene blir dermed

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}.$$

Det er selvfølgelig ikke tilfeldig at notasjonen her likner veldig notasjonen som ble brukt til å karakterisere en paraksial stråle i kapittel 3.

B.6 Tykk linse og hovedplan

For en tykk linse må vi ikke bare anvende de to matrisene tilsvarende en grenseflate med krumning, men også ha en matrise tilsvarende tykkelsen til linsen imellom. Selve matrisen er derfor gitt ved

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 + \frac{d}{R_1} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) & \frac{n_1 d}{n_2} \\ - \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{d}{R_1 R_2} \right] & 1 + \frac{d}{R_2} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

som betyr at en tykk linse (under antakelsen $n_1 = n_{\text{luft}} \approx 1$) har en brennvidde tilsvarende

$$\frac{1}{f} = (n_{\text{glass}} - 1) \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \left(1 - \frac{1}{n_{\text{glass}}} \right) \frac{d}{R_1 R_2} \right].$$

For $d = 0$ reduseres likningen igjen til linseliplerlikningen. Videre reduseres diagonalelementene til matrisen til 1 og elementet øverst til høyre til 0. Dermed reduseres hele matrisen til en matrisen tilsvarende en tynn linse.

På den andre siden kan man approksimere en tykk linse ved en tynn linse (med samme brennvidde) og tomrom på høyre og venstre side. Vi kan nemlig formulere

$$\begin{pmatrix} 1 & H_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{H_2}{f} & H_1 + H_2 - \frac{H_1 H_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{H_1}{f} \end{pmatrix},$$

som gir akkurat samme optiske matrise som for en tykk linse med samme brennvidde hvis

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{fd}{R_2} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \\ H_2 &= \frac{fd}{R_1} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right). \end{aligned}$$

Planene ved avstand H_1 og H_2 fra den tynne, ekvivalente linsen kalles hovedplan.

Faktisk kan alle kombinasjoner av optiske elementer som er diskutert så langt, altså rette strekninger, tynne og tykke linser eller hulspeil, med eller uten blenderåpninger formuleres som ekvivalent til en tynn Gaußlinse med tomrom på høyre og venstre siden. Alle slike kombinasjoner av matriser kommer nemlig til å resultere i en matrise $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ med determinant $AD - BC = 1$ (siden et produkt av matriser har determinant som er lik produktet til alle enkelddeterminanter, og alle enkelddeterminanter til de elementene som vi inkluderer her er lik 1). Vi har nemlig

$$\begin{pmatrix} 1 & H_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\alpha_G & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & H_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i\alpha_G H_2 & H_1 + H_2 + i\alpha_G H_1 H_2 \\ i\alpha_G & 1 + i\alpha_G H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

som betyr at de tre parameterne til det ekvivalente systemet er entydig gitt ved

$$\begin{aligned} \alpha_G &= -iC \\ H_1 &= \frac{D - 1}{C} \\ H_2 &= \frac{A - 1}{C}. \end{aligned}$$

Her kan man se bort fra parameteren B – den er ikke uavhengig av de andre parameterne, siden alle sammen må oppfylle betingelsen for determinanten som er $AD - BC = 1$.

B.7 Revers stråleretning

Prinsipielt er et optisk system som kan beskrives ved matriseoptikk fullstendig reversibel. Det betyr at den omvendte strålevei beskives ved den inverterte optiske matrisen.¹¹ Her må man passe på at for den omvendte strålevei, så bytter stigningene fortegn. Til sammen beskrives den omvendte strålevei altså ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ -r'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r'_2 \end{pmatrix},$$

som kan skrives mer kompakt ved

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix}.$$

¹¹Det er alltid mulig å danne den inverterte matrisen, siden determinanten til matrisen er, som vanlig, $AD - BC = 1$. Det gjør også at formen til den inverterte matrisen er veldig enkel.

C Stråleparameterprodukt

Utgangspunkt for diskusjonen her er formelen for relativ stråleradius i asymptotisk limit fra teksten til Figur 7.1. Vi starter altså med

$$\frac{W(\zeta)}{W_0} \approx \sqrt{1 + \Omega_f^2} (\zeta - \zeta_W).$$

For neste trinn husker vi at stråleradien W_W ved strålemidjen er gitt ved $W_W = W_0 \frac{\Omega_f}{\sqrt{1 + \Omega_f^2}}$, og at ζ koordinaten var gitt ved $\zeta = \frac{z}{F_0}$. Dermed kan vi skrive

$$W(z) \approx \frac{\Omega_f W_0^2}{W_W F_0} (z - z_W).$$

Dette resultatet kan vi forenkle med $\Omega_f = \frac{2F_0}{kW_0^2}$ til

$$W(z) \approx \frac{2}{kW_W} (z - z_W),$$

som betyr at åpningsvinkelen til strålen er $\vartheta_0 = \frac{2}{kW_W}$. Stråleparameterproduktet BPP er definert som åpningsvinkelen til strålen ganger stråleradien ved strålemidjen, som altså for en Gaußstråle gir

$$\text{BPP} = \vartheta_0 W_W = \frac{2}{k} = \frac{\lambda}{\pi},$$

som altså er uavhengig av stråleparameterne W_0 og F_0 . For en realistisk laserstråle får man gjerne en korreksjonsfaktor $M^2 > 1$, altså

$$\text{BPP} = M^2 \frac{\lambda}{\pi}.$$

Korreksjonsfaktoren lar seg lett bestemme eksperimentelt, siden den er uavhengig av hvor på strålen man måler, så lenge man måler i fritt rom.

En svak fiberlaser realiserer nokså bra en Gaußstråle og har en korreksjonsfaktor omtrent lik 1. Problemer oppstår derimot når effekten økes og man får en linseeffekt på grunn av ujevn termisk utvidelse relatert til ikke lenger neglisjerbar absorpsjon av en liten brøkdel av strålingen. Her kan korreksjonsfaktoren øke betraktelig.

Det er også interessant å se på størrelser som radians, altså utstrålt effekt i romvinkelen $\Delta\Omega$ per areal til strålekilden. Hvis vi tenker oss arealet til strålekilden som $A = \pi W_W^2$, altså tverrsnittet til Gaußstrålen ved strålemidjen og romvinkel som $\Delta\Omega = 2\pi [1 - \cos \vartheta_0] \approx \pi \vartheta_0^2$, altså gitt ved åpningsvinkelen til strålen, så finner vi at radians er gitt ved

$$L = \frac{P}{\pi \vartheta_0^2 \pi W_W^2},$$

der P er lasereffekten. Siden nevneren er lik $(\pi \text{BPP})^2$, så får vi dermed for en realistisk laserstråle

$$L = \frac{P}{M^4 \lambda^2}.$$

Liknende betraktninger gjelder også for spektral radians og størrelser som uttrykker stråle kvalitet som for eksempel briljans.

D Novikov-Furutsuteoremet

I utledningen av Markovapproksimasjonen har vi behov for Novikov-Furutsuteoremet. I motsetningen til Wiener-Khinchinteoremet som anvendes i utledningen til Rytovapproksimasjonen og som mer eller mindre forteller under hvilke forutsetninger en Fouriertransformasjon eksisterer (se kapittel 5), så er Novikov-Furutsuteoremet knyttet til en formel for å beregne en type forventningsverdi. Vi skal derfor motivere denne formelen. Utgangspunkt er at man ønsker å beregne en forventningsverdi til et produkt av en $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ -fordelt (se for eksempel FFI-Notat/18-02018) variable ξ og en funksjon av denne variabelen $f(\xi)$ altså

$$\langle \xi f(\xi) \rangle = \int \xi f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} d\xi.$$

For å kunne beregne denne forventningsverdien benytter vi oss av en generalisering av den momentgenererende funksjonen som vi har diskutert i kapittel 2.2, nemlig

$$M_f(x) = \langle f(\xi) e^{x\xi} \rangle = \int f(\xi) e^{x\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}} d\xi,$$

der vi kan omforme høyre side til

$$M_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{x^2\sigma^2}{2}} \int f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} d\xi.$$

Vi får altså etter substitusjonen $v = \xi - x\sigma^2$

$$M_f(x) = \langle f(v + x\sigma^2) \rangle_v e^{\frac{x^2\sigma^2}{2}},$$

hvor vi har merket av variabelen som skal midles over i forventningsverdien for å unngå konfusjon. På den andre siden gjelder for den generaliserte momentgenererende funksjonen $M_f(x)$ på liknende måte som før at

$$\langle \xi^n f(\xi) \rangle = \left. \frac{d^n}{dx^n} M_f(x) \right|_{x=0},$$

som man lett kan innse, hvis man utvikler eksponentialfunksjonen i definisjonen til den generaliserte momentgenererende funksjonen i sin Taylorrekke og integrerer denne rekken ledd for ledd (se kapittel 2.2). I så fall får man nemlig

$$M_f(x) = \sum_n \frac{1}{n!} x^n \langle \xi^n f(\xi) \rangle.$$

Spesielt for $n = 1$ får man dermed

$$\langle \xi f(\xi) \rangle = \left. \frac{d}{dx} M_f(x) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \left[\langle f(v + x\sigma^2) \rangle_v e^{\frac{x^2\sigma^2}{2}} \right] \right|_{x=0}.$$

Etter derivasjonen på høyre siden får man

$$\langle \xi f(\xi) \rangle = \left[\langle f'(v + x\sigma^2) \rangle_v \sigma^2 e^{\frac{x^2\sigma^2}{2}} + \langle f(v + x\sigma^2) \rangle_v e^{\frac{x^2\sigma^2}{2}} x\sigma^2 \right]_{x=0}$$

og når man faktisk setter inn $x = 0$ i uttrykket, så får man endelig

$$\langle \xi f(\xi) \rangle = \sigma^2 \langle f'(v) \rangle_v .$$

Her kan man nå på høyre siden trygt erstatte variabelen det skal midles over med det vanlige ξ . I tilfelle av et gaussisk stokastisk felt $v(\mathbf{r})$ med forventningsverdi $\langle v(\mathbf{r}) \rangle = 0$ kan resultatet generaliseres til

$$\langle v(\mathbf{r}) f[v] \rangle = \int R_v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \frac{\delta f}{\delta v(\mathbf{r}')} \right\rangle d^3 r' ,$$

der $f[v]$ indikerer en funksjonsavhengighet, $\frac{\delta f}{\delta v}$ en variasjonsderivert og R_v er korrelasjonsfunksjonen, altså en generalisering til variansen i tilfelle av et stokastisk felt. Beviset finnes for eksempel i boken til V. Tatarski.

Om FFI

Forsvarets forskningsinstitutt ble etablert 11. april 1946. Instituttet er organisert som et forvaltningsorgan, med særskilte fullmakter underlagt Forsvarsdepartementet.

FFIs formål

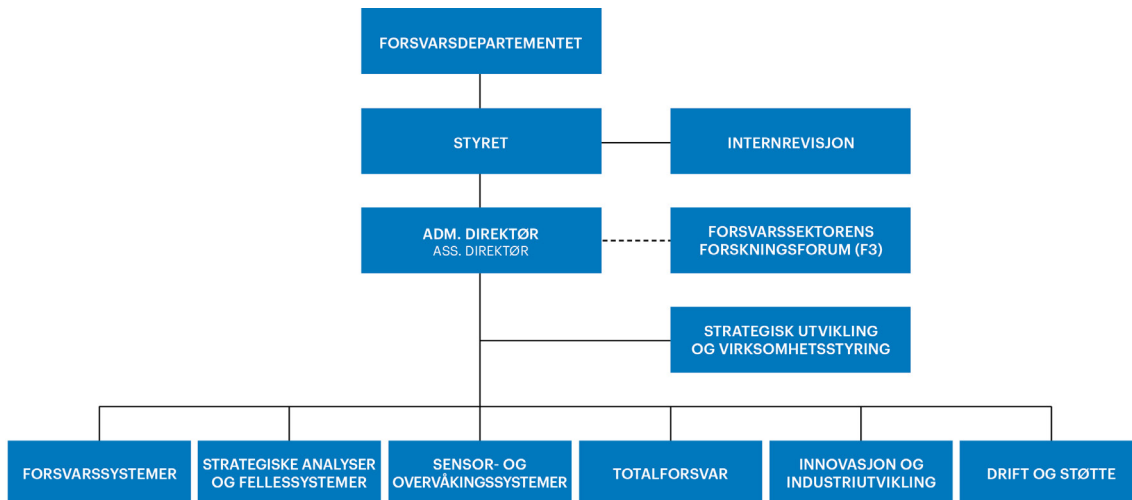
Forsvarets forskningsinstitutt er Forsvarets sentrale forskningsinstitusjon og har som formål å drive forskning og utvikling for Forsvarets behov. Videre er FFI rådgiver overfor Forsvarets strategiske ledelse. Spesielt skal instituttet følge opp trekk ved vitenskapelig og militærteknisk utvikling som kan påvirke forutsetningene for sikkerhetspolitikken eller forsvarsplanleggingen.

FFIs visjon

FFI gjør kunnskap og ideer til et effektivt forsvar.

FFIs verdier

Skapende, drivende, vidsynt og ansvarlig.



Forsvarets forskningsinstitutt
Postboks 25
2027 Kjeller

Besøksadresse:
Instituttveien 20
2007 Kjeller

Telefon: 63 80 70 00
Telefaks: 63 80 71 15
Epost: post@ffi.no

Norwegian Defence Research Establishment (FFI)
P.O. Box 25
NO-2027 Kjeller

Office address:
Instituttveien 20
N-2007 Kjeller

Telephone: +47 63 80 70 00
Telefax: +47 63 80 71 15
Email: post@ffi.no